EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE I

EXEMPLE N° 1 Démontrer que:

1. le carré $C = [0,2] \times [-2,0]$ est une partie bornée qui n'est pas ouverte

2. le demi-plan $Q_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est une partie ouverte qui n'est pas bornée.

3. $\emptyset$ est une partie ouverte et fermée (ce qui est plus étonnant !)

SUITE EXEMPLE N° 1 Pour C et Q_+, préciser les points à l'intérieur, les points adhérents et les points à l'extérieur.
Un "bon" schéma suffira pour justifier les réponses

EXEMPLE 3/2 Étudier la continuité de la fonction f d'expression $f(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ t^2 \ln t \end{pmatrix}$ qu'on prolongera éventuellement par continuité. Étudier ensuite la dérivabilité de f.

EXEMPLE N° 2 Si $\left[\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\right]$ est de classe C^1 et ne s'annulant pas, prouver que

$$\|\overrightarrow{f}\| \text{ est constante sur I} \Leftrightarrow \forall t \in I,\ \overrightarrow{f}(t) \text{ et } \overrightarrow{f}'(t) \text{ sont orthogonaux}$$

EXEMPLE N° 3 Déterminer un $DL_3(0)$ de $\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ \dfrac{1}{1+t} \end{pmatrix}$ et identifier $\overrightarrow{f}^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0,3]\!]$

EXEMPLE N° 4

1. Proposer une représentation paramétrique de la courbe et expliciter la fonction vectorielle associée pour

- **a.** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre I(0,1) et de rayon 3
- **b.** $\mathcal{H}$ est la branche d'hyperbole $xy = 1$ où $x > 0$
- **c.** $\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur I

2. Identifier la courbe $\begin{cases} x = 3\cos(4t) \\ y = 1 + 3\sin(4t) \end{cases}$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

SUITE EXEMPLE N° 3 On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \operatorname{sh} t \\ y(t) = \dfrac{1}{1+t} \end{cases}$, $t \in]-1,1[$

Justifier que le point de paramètre $t = 0$ est régulier et préciser une équation cartésienne de la tangente en ce point.

EXEMPLE N° 5 On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos(t^2) \\ y(t) = \dfrac{t^4}{1+t^2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Justifier que le point de paramètre $t = 0$ est stationnaire et déterminer une équation cartésienne de la tangente en ce point.

EXEMPLE N° 6 On considère la courbe paramétrée $\mathscr{C} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2-2t}{t^2-1} \end{cases}$, $t \in]1, +\infty[$

1. Montrer que le point $M(t)$ de paramètre t tend lorsque t tend vers $+\infty$ vers un point limite M_∞ dont on précisera les coordonnées.

2. En considérant ce point M_∞ comme appartenant à la courbe, préciser une équation cartésienne la demi-tangente en ce point.

EXEMPLE N° 7 Préciser l'allure du point de paramètre $t = 0$ pour la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^4) \\ y(t) = \operatorname{ch}(t^2) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

EXEMPLE N° 8 Étudier les branches infinies de $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2(t+1)}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$

EXEMPLE N° 9

1. On considère **l'astroïde** donnée par la représentation $\left\{\begin{array}{l} x(t)=\cos^3(t) \\ y(t)=\sin^3(t) \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

On note $\mathrm{M}(t)$ le point de paramètre t de l'astroïde.

a. Comparer les points $\mathrm{M}(t+2\pi)$ et $\mathrm{M}(t)$. On suppose qu'on a construit le support de Γ pour $t \in [a, a+2\pi]$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Comment construire le support de Γ sur $\mathbb{R}$?

b. Trouver une symétrie entre les points $\mathrm{M}(-t)$ et $\mathrm{M}(t)$. On suppose qu'on a construit le support de Γ sur $[0, +\infty[$. Comme construire le support de Γ sur $\mathbb{R}$?

c. Trouver une symétrie entre les points $\mathrm{M}(\pi-t)$ et $\mathrm{M}(t)$. Si on connaît Γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, quelle portion de Γ peut-on construire ?

d. Trouver une symétrie entre les points $\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ et $\mathrm{M}(t)$. Sur quel domaine D suffit-il de connaître Γ pour obtenir un tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

e. En réalisant le bilan des questions précédentes, proposer un domaine d'étude D le plus petit possible suffisant pour construire le support de Γ sur $\mathbb{R}$ à partir du support sur D en appliquant des transformations géométriques.

2. Expliciter un domaine d'étude pour **la cycloïde** donnée par la représentation

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\mathrm{R}(t-\sin t) \\ y(t)=\mathrm{R}(1-\cos t) \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \ (\mathrm{R}>0 \text{ est fixé})$$

3. Étudier complétement l'astroïde et la cycloïde.

EXEMPLE N° 10 Montrer que la courbe paramétrée définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t)=3t^3+2*t^2-t-1 \\ y(t)=3*t^2+2*t+1 \end{array}\right.$ admet un point double et déterminer les deux tangentes correspondantes.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

EXERCICE N° 1 Étudier l'allure au voisinage du point stationnaire de la courbe Γ dans les cas suivant

1) $\Gamma : \begin{cases} x(t)) = t^3 - t^5 + t^7 \\ y(t) = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ 2) $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^3) \\ y(t) = t^3\sqrt{1-t^3} \end{cases}$, $t \in]-1,1[$ 3) $\Gamma : \begin{cases} x(t) = e^{t-1} - t \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

EXERCICE N° 2 On donne ci-dessous le tableau de variation d'une courbe paramétrée $f(t) = \Big(x(t), y(t)\Big)$.

On note M(t) le point de paramètre t et $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{a}$		0		1		a		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	↘	0	↘	-0.09	↗	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	11.09	↗	$+\infty$
y	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$-\frac{1}{a}$	↗	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	a	↘	1
$y'(t)$		$+$	||	$+$	|	$+$	0	$-$	||	$-$	|	$-$	

1. Repérer les points où les tangentes sont parallèles aux axes et les points stationnaires.

2. Repérer les branches infinies. Identifier les asymptotes verticales et horizontales.

3. Ce tableau est celui de la courbe donnée à l'exemple 7 avec $x(t) = \dfrac{t^2(t+1)}{t-1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1}$
L'étude des branches infinies a été faite à cette occasion : vos réponses sont-elles cohérentes avec cette étude ? Rappeler l'équation de l'asymptote oblique de cette courbe.

4. Esquisser la courbe en sachant, de plus, que le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce avec pour tangente la première bissectrice.

5. Justifier le signes des dérivées dans ce tableau de variation.

6. Justifier la nature du point singulier en utilisant un DL_3 de f

EXERCICE N° 3 Étudier et construire la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)\ln t \\ y(t) = \left(t - \dfrac{1}{t}\right)\ln t \end{cases}$. On pourra rechercher une transformation géométrique permettant de construire le point de paramètre $\dfrac{1}{t}$ à partir du point de paramètre t et en déduire une réduction du domaine d'étude.

EXERCICE N° 4 Étudier et construire la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 e^t \\ y(t) = \dfrac{e^t}{t+1} \end{cases}$

EXERCICE N° 5 Étudier et construire la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = (1+\sin t)\cos t \end{cases}$