EXEMPLE DU COURS SUR LE CHAPITRE 0

EXEMPLE N° 1 Dans chaque cas, prouver que F est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

a) $F = \left\{(t+2s, -t, 4s-t) \mid (t,s) \in \mathbb{R}^2\right\}$ b) $F = \left\{(\alpha+\beta)X^2 + (\alpha-\beta) \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2\right\}$ c) $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & ia+b & b+2ic \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

d) $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t = x-y+z-t = 0\right\}$

e) F contient les polynômes réels de degrés au plus 3 avec $P(1) = P^{(3)}(1) = 0$

f) F est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$

g) F est l'ensemble des suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_n$

<u>avec en plus</u> :

z) $F = \text{Vect}\Big((1,0,1,1), (1,1,1,1), (0,1,0,-1), (1,1,1,-1)\Big)$

i) F est l'ensemble des suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1}$

EXEMPLE N° 2 Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $e_1 = 1$, $e_2 = 1+X$, $e_3 = (1+X)^2$ et $e_4 = (1+X)^3$

1. Prouver que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Quel espace connu E engendre-t-elle ?

2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E. Donner les matrices de passage entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

3. En déduire une primitive de $\left[f : x \mapsto (x^3 + 2x^2)(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]$

EXEMPLE 2.5 Soient $u = (1,-1,1)$, $v = (0,-1,2)$ et $w = (1,-2,3)$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$.

1) Donner une base de $F = \text{Vect}(u,v,w)$.

2) Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z = 0\}$. Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

3) Montrer que F = G.

4) On note $\mathscr{B}_1 = (u,v)$ et $\mathscr{B}_2 = (a,b)$ où $a = (1,0,-1)$ et $b = w$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont des bases de F
Donner les coordonnées X_1 et X_2 de $(2,1,-4)$ dans $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$

5) Expliciter les matrices de passages entre $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

EXEMPLE N° 3 Soient $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\right\}$ et $G = \left\{(2a-b+c)X^2 + (b+a+2c)X + a+b+2c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

1. Prouver que F et G sont des sev de $\mathbb{R}_2[X]$

2. Déterminer une base de F et une base de G

3. Déterminer une base de F + G et, en déduire $F + G = \mathbb{R}_2[X]$

4. Déterminer $\dim(F \cap G)$.

5. Donner une base de $F \cap G$ et donner un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.

EXEMPLE N° 4 Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence :

$$\ker f = \text{Im } f \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg} f$$

EXEMPLE N° 5 Donner le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et des produits de ces matrices.

EXEMPLE N° 6 Préciser le noyau et l'image des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que

f vérifie $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P(1) - P(1)X + P(-1)X^2 - P(-1)X^3$

g est canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXEMPLE N° 7 On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Quel est le degré de $f(1,1,0)$?
2. Justifier que f est un isomorphisme en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.
3. On admet que $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0$ Retrouver d'une autre façon que f est un isomorphisme.
4. Quel est antécédent du polynôme $1 + 2X + 3X^2$ par f ?

EXEMPLE N° 8 On définit f sur $M_2(\mathbb{R})$ par $f(A) = (a+b)X^2 + (b+c)X + (c+d)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

et également $g \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}_2[X], M_2(\mathbb{R})\big)$ canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. **a.** On admet que f est linéaire. Rappeler ce que cela signifie.
   b. Préciser Ker f. En déduire que f est surjective non injective.
   c. Donner la matrice canoniquement associée à f.
2. Justifier que g est injective non surjective.
3. Préciser la matrice canoniquement associée à $g \circ f$ et l'image par $g \circ f$ de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
4. Prouver que Ker $(g \circ f)$ = Ker f puis que Im $(g \circ f)$ = Im g

EXEMPLE N° 9 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 13 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$

1. Calculer l'image par f de $P = -X^2 + 3X + 2$. Que peut-on en déduire pour l'application f ?
2. Préciser le noyau et l'image de f.
3. Donner la matrice canoniquement associée à $f + id$. En déduire un polynôme Q de $\ker(f + id)$.
4. Proposer de même un polynôme R de $\ker(f - 2id)$.
5. Prouver que $\mathscr{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice A' de f dans cette base.
6. Préciser les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Exprimer A' à l'aide de A et P.

EXEMPLE N° 10 Dans $\mathbb{R}^4$ où on note (x, y, z, t) les coordonnées dans la base canonique.

1. Identifier géométriquement l'endomorphisme q canoniquement associé à la matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On considère le sous-espace vectoriel F donné par les équations $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,0), (0,0,-1,1)\big)$
2. Prouver que F et G sont supplémentaires.
   Préciser la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.
3. Donner la matrice S dans la base canonique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
4. Justifier qu'il existe une matrice inversible P qu'on précisera telle que $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$