EXERCICE Nº 1 *Durée conseillée : 30 minutes* Les deux questions sont indépendantes

1. a. Rappeler le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\operatorname{Arctan} x$

On obtient le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\operatorname{Arctan}(x)$ en intégrant terme à terme le $\mathrm{DL}_2(0)$ de sa dérivée :

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2) \quad \text{d'où} \quad \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} 0 = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

b. Justifier que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ est convergente.

On pose $f(t) = \dfrac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{t}$ alors f est continue sur $]0,+\infty[$ et donc aussi sur $[1,+\infty[$ où $t \neq 0$

Il y a une singularité en $+\infty$ à étudier : $\operatorname{Arctan} x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ avec $x = \dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donne

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) = \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{3t^3}$$

Or $\left[t \mapsto \dfrac{1}{3t^3}\right]$ est une fonction de Riemann qui est intégrable en $+\infty$ aussi f est bien intégrable en $+\infty$ et donc $\boxed{\text{I converge}}$

c. Calculer I à l'aide d'une intégration par parties.

On pose : $\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} - \left(-\dfrac{1}{t^2}\right) \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^2+1} \\ v(t) = t \end{cases}$ où u et v sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

<u>Sous réserve d'existence</u> :

$$\mathrm{I} = \int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

$$[u(t)v(t)]_1^{+\infty} = \left[1 - t\operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - t\operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right) - (1 - 1\times\operatorname{Arctan} 1)$$

Or : $\operatorname{Arctan} x \sim_0 x$ avec $x = \dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $t\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{t} \sim_{+\infty} t \times \dfrac{1}{t} \sim_{t\to+\infty} 1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(1 - t\operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right) = 0$

Ainsi, $[u(t)v(t)]_1^{+\infty}$ converge et l'intégrale de départ I est convergente donc <u>l'intégration par parties est pertinente</u>.

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{4} - 1 - \int_1^{+\infty} t \times \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - 1 - \int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\times\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - 1 - \left[-\ln t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - 1 - \left[\ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right]_1^{+\infty}$$

Or : $\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t} \sim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{t^2}}{t} \sim_{+\infty} 1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = \ln 1 = 0$ de sorte que : $\mathrm{J} = \dfrac{\pi}{4} - 1 - (0 - \ln\sqrt{2}) \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{J} = \dfrac{\pi}{4} - 1 - \dfrac{\ln 2}{2}}$

2. Soit $a > 0$ fixé, on considère l'intégrale $\mathrm{I}_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$

a. Justifier la convergence de I_a

On introduit g avec $g(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+e^{a\ln t})}$

Par les théorèmes usuels, g est continue sur $]0,+\infty[$ où $t > 0$, $1+t^2 \neq 0$ et $1 + t^a \neq 0$

En 0 : $t^a = e^{a\ln t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ car $a > 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = 1$ et l'intégrale est faussement généralisée car g se prolonge par continuité en 0

En $+\infty$: $g(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^2 \times t^a} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^{2+a}}$ or $\left[t \mapsto \dfrac{1}{t^{2+a}}\right]$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ car $\alpha = 2 + a > 2 > 1$

Ainsi, g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc $\boxed{\mathrm{I}_a \text{ converge}}$

b. En utilisant le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que $\mathrm{I}_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\mathrm{d}x$.

On pose $t = \varphi(x)$ où $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe C^1, strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc bijective sur $]0,+\infty[$

On a : $t = \dfrac{1}{x}$, $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$, $t\,\begin{vmatrix} +\infty \\ 0 \end{vmatrix}$, $x\,\begin{vmatrix} 0 \\ +\infty \end{vmatrix}$ et l'intégrale I_a étant convergente, toutes les intégrales écrites seront convergentes.

$$\mathrm{I}_a = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^a}\right)} \times -\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \times \frac{x^a}{x^a+1} \times \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{I}_a = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)}\mathrm{d}x}$$

c. Calculer alors $2\mathrm{I}_a = \mathrm{I}_a + \mathrm{I}_a$ puis en déduire I_a

Comme toutes les intégrales convergent, on a, par linéarité :

$$2\mathrm{I}_a = \mathrm{I}_a + \mathrm{I}_a = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} + \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0$$

Dés lors : $2\mathrm{I}_a = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{I}_a = \dfrac{\pi}{4}}$

EXERCICE N° 2 *Durée conseillée : 1 heure*

1. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

a. Déterminer le rayon R de convergence de cette série entière.

Méthode n° 1 : $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc la série a le même rayon de convergence que la série $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ qui est du type $\sum n^\alpha x^n$ avec $\alpha = -2$ donc on sait que ce rayon vaut $R = 1$

Méthode n° 2 :Si $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors avec la règle de d'Alembert,

Pour $x \neq 0$: $\dfrac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} \times \dfrac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \dfrac{n}{n+2}|x| \sim_{n\to+\infty} |x|$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } |x|<1 \text{ alors la série } \sum a_n x^n \text{ converge absolument de sorte que } R\geqslant 1\\ \text{Si } |x|>1 \text{ alors la série } \sum a_n x^n \text{ diverge grossièrement de sorte que } R\leqslant 1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R=1}$$

b. Justifier que sa somme S est une fonction définie sur l'intervalle fermé $[-R, R]$

La somme S de cette série entière est définie à minima sur l'intervalle ouvert $]-R, R[=]-1, 1[$.
Étudions la convergence aux bords de ce domaine pour $x = \pm 1$:
$\left|\dfrac{x^n}{n(n+1)}\right| = \dfrac{1}{n(n+1)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente ($\alpha = 2 > 1$) donc le critère d'équivalence assure que la série $\sum \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ converge absolument pour $x = \pm 1$ et on sait que la convergence absolue entraîne la convergence de la série.
Ainsi, $\boxed{\text{la somme S de la série est définie sur l'intervalle fermé } [-R,R]=[-1,1]}$

c. Préciser la valeur de $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$

Méthode n° 1 On part du développement usuel $-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$ pour $|t| < 1$

En utilisant le théorème d'intégration terme à terme, on a pour $|x| < 1$:

$$-\int_0^x \ln(1-t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\times\frac{x^{n+1}}{n+1} = xS(x)$$

Alors, pour $x \neq 0$ dans $]-1, 1[$, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\left\{\begin{array}{l} u(t)=\ln(1-t)\\ v'(t)=-1\end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{l} u'(t)=\dfrac{-1}{1-t}\\ v(t)=1-t\end{array}\right. \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont } C^1 \text{ sur } [0,x] \text{ ou } [x,0]$$

$$xS(x) = -\int_0^x \ln(1-t)\,dt = \Big[(1-t)\ln(1-t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{-(1-t)}{(1-t)}\,dt = (1-x)\ln(1-x) + \int_0^x dt = (1-x)\ln(1-x) + x$$

Méthode n° 2 On a $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ aussi : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$

où on peut utiliser la linéarité car les 3 sommes sont absolument convergentes pour $|x| < 1$.

On connaît le développement usuel $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$

Il peut aussi s'écrire par changement d'indice $n = k+1$: $-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^{k+1}}{k+1} = x + x\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k+1}$

Alors, pour $x \neq 0$ dans $]-1, 1[$: $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k+1} = \dfrac{1}{x}\Big(-x-\ln(1-x)\Big)$ et $S(x) = -\ln(1-x) - \dfrac{1}{x}\Big(-x-\ln(1-x)\Big)$

Dans tous les cas : $\boxed{\text{pour } x\neq 0 \text{ dans }]-1,1[: \quad S(x) = \dfrac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x} = 1+(1-x)\dfrac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{et } S(0)=0 \text{ (évident)}}$

d. Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$

Il s'agit de déterminer $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ dont on a déjà justifié l'existence en 1.a.

On sait que S est continue sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$ donc $S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(1 + \dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x}\right) = 1 - \dfrac{0}{1}$ par croissance comparée puisque $\lim_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{t\to 0} t\ln t = 0$. Ainsi : $\boxed{S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)} = 1}$

2. On fixe $a \in]0,1[$.

a. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Les théorèmes usuels assurent la continuité de $\left[f : x \mapsto \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}\right]$ sur $]0,a]$ car $\begin{cases} 1-x \geqslant 1-a > 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$.

En 0 : $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow x + \ln(1-x) = -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \sim_0 -\dfrac{x^2}{2} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} -\dfrac{1}{2}$

f se prolonge par continuité avec $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$ car elle est faussement généralisée.

b. Prouver que $\left[f : x \mapsto \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}\right]$ est développable en série entière en 0 avec : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k+2}\right) x^k$ pour $x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

On connaît le développement en série entière $\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$

Dés lors : $x + \ln(1+x) = x - x - \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$

et, puisque x^2 est en facteur sur chacun des termes de cette série entière, on peut écrire :

$f(x) = \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2} = -\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+2}$ pour $\begin{cases} |x| < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ (en posant $k = n-2$) et l'égalité reste vraie pour $x = 0$ puisque $f(0) = -\dfrac{1}{2}$

(d'après le prolongement par continuité)

On a trouvé une série entière qui coïncide avec $f(x)$ sur $]-1,1[$ donc on peut affirmer que

$\boxed{f \text{ est développable en série entière au voisinage de } 0}$ avec $\boxed{f(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+2}}$ sur $]-1,1[$

c. Démontrer alors que $\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$

Le théorème d'intégration terme à terme donne une primitive F de f sur $]-1,1[$ qu'on obtient en intégrant terme à terme le développement en série entière : $\mathrm{F}(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2} \times \frac{x^{k+1}}{k+1}$ pour $|x| < 1$

On peut alors calculer l'intégrale puisque $]0,a] \subset]-1,1[$:

$\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_0^a = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(a) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)(k+2)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$ en posant $n = k+1$

3. Justifier la convergence et préciser la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la question précédente.

La fonction f est continue sur $]0,1[$ (où $1-x > 0$ et $x \neq 0$) et on a déjà vu qu'elle est prolongeable par continuité sur $[0,1[$.

En revenant à la définition, l'intégrale est convergente si $\displaystyle\lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$ et, dans ce cas, cette limite est la valeur de l'intégrale.

Dans la question 2.c., on a obtenu que, pour $a \in]0,1[$: $\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{S}(a)$ où S est la somme de la série entière définie sur l'intervalle fermée $[-1,1]$ dans la question 1..

On sait que la somme d'une série entière est continue sur son domaine de définition donc que $\displaystyle\lim_{a \to 1^-} \mathrm{S}(a) = \mathrm{S}(1)$

On peut conclure que $\displaystyle\lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{S}(1)$ existe dans $\mathbb{R}$ donc que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } -\mathrm{S}(1) = -1}$

 Extrait du sujet Maths C de 2017 *Durée conseillée : 1 heure*

Soit F la fonction qui, à tout réel positif x, associe : $e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$

La fonction $[h : t \mapsto e^{t^2}]$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier, C^0 sur $\mathbb{R}$ et on peut introduire une primitive H qui s'annule en 0 qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a : $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{H}(x)$. De plus, $h(x) \neq 0$ de sorte que $\dfrac{1}{h} = [t \mapsto e^{-t^2}]$ est aussi C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On obtient donc que $\boxed{\text{F est de classe } C^1 \text{ (donc dérivable) sur } \mathbb{R}}$ par produit de fonctions de classe C^1.

2. En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

On demande ici uniquement de justifier l'existence d'un développement en série entière...pas de le calculer. Il faut, par contre, mettre en avant les différents théorèmes du cours utilisés ainsi que les conséquences sur le rayon de convergence

La fonction exponentielle est développable en série entière (notée DSE) sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (rayon de convergence(rdc) $+\infty$)

Par changement de variables : $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ et $e^{x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ (toutes deux de rdc $+\infty$)

Ainsi,par intégration termes à termes des DSE, $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ (avec un rdc conservé à $+\infty$)

Enfin, par produit de Cauchy de ces séries entières de rdc $+\infty$,

$$\boxed{\text{F est développable en série entière avec un rayon de converge } \mathrm{R} = +\infty}$$

Dans le cas de séries de rayon de convergence R_1 et R_2, alors le produit de Cauchy à un rayon $\mathrm{R} \geqslant \min(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ (avec égalité si $\mathrm{R}_1 \neq \mathrm{R}_2$)

3. Montrer que la fonction F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'(x) = -2xy(x) + 1 \quad (\mathscr{E})$

Le calcul de dérivée est la suite logique de la construction de F dans la question II-1.

Dans le cas général où $\Phi(x) = \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}\circ u(x) - \mathrm{F}\circ v(x)$

Si u et v sont dérivables alors, par composition de fonctions dérivables (F est dérivable puisque c'est une primitive de f et $\mathrm{F}' = f$), on a Φ est dérivable sur I et : $\Phi'(x) = u'(x) \times f\big(u(x)\big) - v'(x) \times f\big(v(x)\big)$

Reprenons les notations de II-1 où pour tout x réel : $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ primitive de $h(x) = e^{x^2}$ d'où $\mathrm{H}'(x) = e^{x^2}$

Par produit : $\mathrm{F}'(x) = \left(e^{-x^2}\right)'\mathrm{H}(x) + e^{-x^2}\mathrm{H}'(x) = -2xe^{-x^2}\mathrm{H}(x) + e^{-x^2}e^{x^2} = -2x\mathrm{F}(x) + e^0 = -2x\mathrm{F}(x) + 1$

Ainsi, $\boxed{\text{F est bien une solution de l'équation différentielle : } y'(x) = -2xy(x) + 1 \quad (\mathscr{E})}$

4. En cherchant le développement en série entière de F sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geqslant 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (le rayon de convergence est $\mathrm{R} = +\infty$ d'après Q2)

Par dérivation terme à terme $\mathrm{F}'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_k x^{n-1}$ puis :

$$\mathrm{F}'(x) = -2x\mathrm{F}(x) + 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = -2x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2a_n) x^{n+1} + 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (-2a_{k-1})x^k + 1$$

en posant $k = n-1$ dans la première somme et $k = n+1$ dans la seconde somme.

Par unicité du développement en série entière, on a, en identifiant les coefficients devant les puissances de k :

$$\boxed{a_1 = 1 \quad (\text{quand } k=0) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad (k+1)a_{k+1} = -2a_{k-1}} \text{ (quand } k \geqslant 1)$$

5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

En utilisant la relation de la question 4 respectivement avec $k = 2p$ et avec $k = 2p+1$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad (2p+1)a_{2p+1} = -2a_{2p-1} \ (1) \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\quad (2p+2)a_{2p+2} = -2a_{2p} \ (2)$$

La relation (2) conduit, par une récurrence triviale, à :

$$a_{2p} = \frac{-2}{2p}a_{2p-2} = -\frac{1}{p}a_{2(p-1)} = -\frac{1}{p} \times -\frac{1}{p-1} \times \cdots \times -\frac{1}{1}a_0 \Leftrightarrow \boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}a_0}$$

Remarque : Puisque $a_0 = \mathrm{F}(0) = 0$, on a : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0}$

En itérant la relation (1), on obtient :

$$a_{2p+1} = \frac{-2}{2p+1}a_{2p-1} = \frac{-2}{2p+1} \times \frac{-2}{2p-1}a_{2p-3} = \cdots = \frac{-2}{2p+1} \times \frac{-2}{2(p-1)+1} \times \cdots \times \frac{-2}{2\times 1+1} \times a_1 \quad \text{et on sait que} \quad a_1 = 1$$

On remarque aussi un produit de p termes avec au dénominateur que les entiers impairs inférieur à $2p+1$. On multiplie au numérateur et au dénominateur par les entiers pairs manquants pour faire apparaître $(2p+1)!$ au dénominateur :

$$a_{2p+1} = \frac{(-2)^p(2p)(2(p-1)) \times \cdots \times (2)}{(2p+1)!} = \frac{(-2)^p 2^p p!}{(2p+1)!} = \frac{(-1)^p \times 2^p \times 2^p p!}{(2p+1)!} \text{ autrement dit } \boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}}$$

6. En déduire le développement en série entière de F.

Il s'agit d'utiliser l'unicité de la solution du problème de Cauchy associé à l'équation $(\mathscr{E})$ avec pour la condition initiale $y(0) = 0$ au voisinage de 0 puisque $\mathrm{F}(0) = 0$. Cette condition impose : $a_0 = \dfrac{\mathrm{F}(0)}{0!} = \mathrm{F}(0) = 0$ et donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = 0}$

On vérifie que l'équation $(\mathscr{E})$ possède des solutions développable en série entière

Méthode n° 1 : en vérifiant que le rayon de convergence est > 0.

$\sum a_n x^n = \sum a_{2p+1} x^{2p+1}$ est une série entière lacunaire dont le rayon de convergence se calcule avec la règle de d'Alembert :

si $u_p = a_{2p+1} x^{2p+1} \neq 0$ pour $x \neq 0$ alors $\dfrac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = \left|\dfrac{a_{2p+3} x^{2p+3}}{a_{2p+1} x^{2p+1}}\right| = \left|\dfrac{a_{2p+3}}{a_{2p+1}}\right| x^2 = \dfrac{2}{2p+3} \times x^2 \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 < 1$

aussi la série converge absolument pour tout x réel et donc le rayon de convergence est $+\infty$

Alors, on dispose de deux solutions sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy $\begin{cases} (\mathscr{E}) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (F et une somme de série entière) donc les deux expressions coïncident pour tout x réel.

Méthode n° 1 : on sait d'après la question 2 que F est développable en série entière et on sait aussi que F est solution de $(\mathscr{E})$ donc l'équation $(\mathscr{E})$ admet nécessairement une solution développable en série entière qui, sous la condition $a_0 = 0$, ne peut être qu'une autre expression de $\mathrm{F}(x)$ par unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} \Leftrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\mathrm{R} = +\infty)}$

Problème **Extrait d'un sujet retravaillé de Banque PT de 2009** *Durée conseillée 1h30*

Partie I

On considère l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients de la diagonale de A et A^T la matrice transposée de A.
On définit l'application φ de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A^T B)$
On convient de noter $[A]_{ij}$ le coefficient situé ligne i colonne j d'une matrice nommée A.

1. a. Pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, rappeler l'expression du coefficient $[AB]_{ij}$ à l'aide des coefficient des matrices A et B.

D'après le cours : $\boxed{[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}[B]_{kj}}$

b. Démontrer alors que, pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}[B]_{ij}$

Pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$: $\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} [A^T]_{ik}[B]_{ki}$ en utilisant l'expression du coefficient $[AB]_{ii}$ vu en 1.a

Mais, par définition de la transposée : $[A^T]_{ik} = [A]_{ki}$ aussi : $\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} [A]_{ki}[B]_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}[B]_{ij}$ ($k = j$ indice muet)

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

On vérifie que φ est une $\underbrace{\text{forme}}_{(1)}$ $\underbrace{\text{bilinéaire}}_{(3)}$ $\underbrace{\text{symétrique}}_{(2)}$ $\underbrace{\text{définie}}_{(5)}$ $\underbrace{\text{positive}}_{(4)}$

1) Pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(A,B)$ est une somme finie de n^2 réels donc elle existe et c'est un réel.

2) Pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$ puisque $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A^TB) = \mathrm{tr}\left((A^TB)^T\right) = \mathrm{tr}\left(B^T(A^T)^T\right) = \mathrm{tr}(B^TA) = \varphi(B,A)$

car, pour $(M,N) \in M_n(\mathbb{R})^2$: $\mathrm{tr}(M^T) = \mathrm{tr}(M)$ et $(MN)^T = N^TM$

OU BIEN $\varphi(A,B) = \varphi(B,A)$ par commutativité du produit sur l'expression $\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}[B]_{ij}$

3) Vu qu'on a prouvé la symétrie, il suffit de prouver une linéarité soit : $\forall (A,B,C) \in M_n(\mathbb{R})^3, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi(A, \alpha B + C) = \alpha\varphi(A,B) + \varphi(A,C)$

Or, on sait que la trace est linéaire donc : $\varphi(A, \alpha B + C) = \mathrm{tr}\left(A^T(\alpha B + C)\right) = \mathrm{tr}\left(\alpha A^TB + A^TC\right) = \alpha\mathrm{tr}(A^TB) + \mathrm{tr}(A^TC) = \alpha\varphi(A,B) + \varphi(A,C)$

4) On vérifie que, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,A) \geqslant 0$ or, avec la relation 1.b., on a : $\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}^2 \geqslant 0$ car c'est une somme de réels positifs

5) On vérifie que,pour $A \in M_n(\mathbb{R})$: $\varphi(A,A) = 0 \Rightarrow A = 0$

Or, avec 1.b. : $\varphi(A,A) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [A]_{ij}^2 = 0$ (somme nulle de réels positifs) et donc $A = 0$ (tous les coefficients nuls)

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}^2}$

Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $\left(M_n(\mathbb{R}), \varphi\right)$, on sait que, pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$:

$\left|\varphi(A,B)\right| \leqslant \|A\| \times \|B\|$ où $\|A\| = \sqrt{\varphi(A,A)}$ est la norme associée au produit scalaire φ

On utilise cette inégalité avec la matrice B telle que $[B]_{ij} = 1$ pour $(i,j) \in [\![,1,n]\!]^2$ (tous les coefficients de B valent 1)

Alors, avec 1b, on a : $\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij} \times 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}$, $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}^2}$ et $\|B\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1} = \sqrt{n^2} = n$

(on somme des 1 et il y a n^2 termes dans la somme)

Ainsi : $\left|\varphi(A,B)\right| \leqslant \|A\| \times \|B\| \Leftrightarrow \boxed{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}^2}}$

4. On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$.

Il s'agit de vérifier que $\forall S \in S_n, \forall A \in A_n,\ \varphi(S,A) = 0$ or : $S \in S_n \Rightarrow S^T = S$ et $A \in A_n \Rightarrow A^T = -A$ Alors : $\varphi(S,A) = \mathrm{tr}(S^TA) = \mathrm{tr}(SA)$
mais aussi $\varphi(S,A) = \varphi(A,S) = \mathrm{tr}(A^TS) = \mathrm{tr}(-AS) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA) = -\varphi(S,A)$ vu que $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$ pour $(M,N) \in M_n(\mathbb{R})^2$
Ainsi : $\varphi(S,A) = -\varphi(S,A) \Rightarrow 2\varphi(S,A) = 0 \Rightarrow \varphi(S,A) = 0$ et donc $\boxed{S_n \text{ et } A_n \text{ sont des sous-espaces orthogonaux de } M_n(\mathbb{R})}$

5. On considère dans cette question uniquement que $n = 2$.

On désigne par F le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ défini par : $\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

a. Donner une base de F

$\mathrm{F} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2\big)$ où $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La famille $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ est génératrice de F et c'est une famille libre (car les deux matrices sont non colinéaires) aussi

$$\boxed{(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) \text{ est une base de F où } \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b. Déterminer la matrice A', image de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, par la projection orthogonale sur F

On utilise la caractérisation de la projection orthogonale :

$$\mathrm{A}' \text{ est la projection de A sur F} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A}' \in \mathrm{F} \\ \mathrm{A}' - \mathrm{A} \in \mathrm{F}^{\perp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{A}' = a\mathrm{A}_1 + b\mathrm{A}_2 \\ \varphi(\mathrm{A}' - \mathrm{A}, \mathrm{A}_1) = 0 \\ \varphi(\mathrm{A}' - \mathrm{A}, \mathrm{A}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{A}' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} \varphi(\mathrm{A}' - \mathrm{A}, \mathrm{A}_1) = 0 \\ \varphi(\mathrm{A}' - \mathrm{A}, \mathrm{A}_2) = 0 \end{cases}$$

Si $\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{A}' - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b-1 & -a \end{pmatrix}$ et, puisque $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{cases} \varphi(\mathrm{A}' - \mathrm{A}, \mathrm{A}_1) = (a-1) + (-1)(-a) = 2a - 1 \\ \varphi(\mathrm{A}' - \mathrm{A}, \mathrm{A}_2) = b + (b-1) = 2b - 1 \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} \varphi(\mathrm{A}' - \mathrm{A}, \mathrm{A}_1) = 0 \\ \varphi(\mathrm{A}' - \mathrm{A}, \mathrm{A}_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

c. En déduire la distance de A à F

D'après le cour : $d(\mathrm{A}, \mathrm{F}) = \|\mathrm{A} - \mathrm{A}'\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4 \times \frac{1}{4}} = \boxed{1 = d(\mathrm{A}, \mathrm{F})}$

Partie II

On définit l'application ψ de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]^2, \quad \psi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sum_{i=0}^{3} \mathrm{P}(i)\mathrm{Q}(i)$

1. On admet que ψ est bilinéaire et que $\psi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \psi(\mathrm{Q}, \mathrm{P})$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]^2$.
Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ en vérifiant les dernières hypothèses nécessaires pour cela.

La définition de $\psi(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ est assurée (c'est une somme de 4 réels) donc c'est bien une forme sur $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]^2$.
On sait déjà qu'elle est bilinéaire et symétrique donc il reste à vérifier qu'elle est définie positive.

Or, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\psi(\mathrm{P}, \mathrm{P}) = \sum_{i=0}^{3} \mathrm{P}(i)^2 \geqslant 0$ (somme de 4 réels positifs) donc ψ est positive.

Enfin : $\psi(\mathrm{P}, \mathrm{P}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{3} \mathrm{P}(i)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![0, 3]\!],\ \mathrm{P}(i)^2 = 0$ (somme nulle de réels positifs) ainsi le polynôme P possède 4 racines distinctes (les 4 réels 0, 1, 2 et 3) or $\deg(\mathrm{P}) \leqslant 3$ donc le polynôme P est nul puisqu'il a plus de racines distinctes que son degré.
Finalement, ψ est bien définie positive et on peut conclure que $\boxed{\psi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]}$

2. Soit $\mathrm{F} = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, \mathrm{X})$

a. Calculer $\psi(1,1)$, $\psi(1,\mathrm{X})$ et $\psi(\mathrm{X},\mathrm{X})$

On applique la définition : $\psi(1,1) = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{4 = \psi(1,1)}$ $\quad \psi(1,\mathrm{X}) = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = \boxed{6 = \psi(1,\mathrm{X})}$

$$\psi(\mathrm{X},\mathrm{X}) = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = \boxed{14 = \psi(\mathrm{X},\mathrm{X})}$$

b. $\mathscr{B}' = (\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1)$ est la base orthonormale de F pour le produit scalaire ψ obtenu en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\mathscr{B}$.
Déterminer explicitement les polynômes P_0 et P_1

<u>Étape n° 1</u> On sait que $\mathrm{P}_0 = \frac{1}{\|1\|}$ où $\|1\| = \sqrt{\psi(1,1)} = \sqrt{4} = 2$ soit $\boxed{\mathrm{P}_0 = \frac{1}{2}}$

<u>Étape n° 2</u> On sait que $\mathrm{P}_1 = \frac{\mathrm{U}_1}{\|\mathrm{U}_1\|}$ où $\mathrm{U}_1 = \mathrm{X} - \psi(\mathrm{X}, \mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0 = \mathrm{X} - \frac{1}{2}\psi(\mathrm{X}, 1) \times \frac{1}{2} = \mathrm{X} - \frac{6}{4} = \mathrm{X} - \frac{3}{2}$

et : $\|\mathrm{U}_1\|^2 = \psi\left(\mathrm{X} - \frac{3}{2}, \mathrm{X} - \frac{3}{2}\right) = \psi(\mathrm{X},\mathrm{X}) - 2 \times \frac{3}{2}\psi(1,\mathrm{X}) + \frac{9}{4}\psi(1,1) = 14 - 3 \times 6 + 9 = 5$ aussi $\boxed{\mathrm{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{X} - \frac{3}{2}\right)}$

3. On fixe $(x_0,x_1,x_2,x_3)=(2,2,-2,0)$ et on considère l'ensemble de réels $\Sigma=\left\{\sum_{i=0}^{3}|x_i-\mathrm{P}(i)|^2\,;\,\mathrm{P}\in\mathrm{F}\right\}$

a. On considère l'application linéaire $u:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}^4$ telle que $u(\mathrm{P})=\big(\mathrm{P}(0),\mathrm{P}(1),\mathrm{P}(2),\mathrm{P}(3)\big)$ dont on admet la linéarité.
Justifier que u est un isomorphisme.

Comme on admet la linéarité et que $\dim\mathbb{R}_3[X]=4=\dim\mathbb{R}^4$, il s'agit de prouver que u est inversible.
On introduit la matrice M de u relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}^4$: u est inversible $\Leftrightarrow\det\mathrm{M}\neq0$
$u(1)=(1,1,1,1)$, $u(X)=(0,1,2,3)$, $u(X^2)=(0,1,4,9)$ et $u(X^3)=(0,1,8,27)$ d'où , en entrant les vecteurs en colonnes :

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\end{pmatrix}$$ d'où, en développant selon L_1 : $$\det\mathrm{M}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&8\\3&9&27\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&6\\3&6&24\end{vmatrix}\text{ avec }\begin{cases}\mathrm{C}_2\leftarrow\mathrm{C}_2-\mathrm{C}_1\\\mathrm{C}_3\leftarrow\mathrm{C}_3-\mathrm{C}_1\end{cases}$$

En développant à nouveau selon L_1 : $\det\mathrm{M}=\begin{vmatrix}2&6\\6&24\end{vmatrix}=48-36\neq0$ et donc $\boxed{u\text{ est un isomorphisme}}$

b. En déduire qu'il existe un unique polynôme R de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall i\in[\![0,3]\!],\ \mathrm{R}(i)=x_i$
Attention ! On ne demande pas d'expliciter le polynôme R

$\forall i\in[\![0,3]\!],\ \mathrm{R}(i)=x_i\Leftrightarrow u(\mathrm{R})=(x_0,x_1,x_2,x_3)\Leftrightarrow\mathrm{R}=u^{-1}(x_0,x_1,x_2,x_3)$ puisque u est inversible
aussi il existe un unique polynôme R de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall i\in[\![0,3]\!],\ \mathrm{R}(i)=x_i$

c. Déterminer le projeté orthogonal $p(\mathrm{R})$ de R sur le sous-espace vectoriel F pour le produit scalaire ψ

On connaît une base orthonormale de F d'après la question 2 aussi, d'après le cours : $p(\mathrm{R})=\psi(\mathrm{R},\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0+\psi(\mathrm{R},\mathrm{P}_1)\mathrm{P}_1$

$$p(\mathrm{R})=\frac14\Big(\mathrm{R}(0)\times1+\mathrm{R}(1)\times1+\mathrm{R}(2)\times1+\mathrm{R}(3)\times1\Big)\times1+\Big(\mathrm{R}(0)\times\mathrm{P}_1(0)+\mathrm{R}(1)\times\mathrm{P}_1(1)+\mathrm{R}(2)\times\mathrm{P}_1(2)+\mathrm{R}(3)\times\mathrm{P}_1(3)\Big)\frac{1}{\sqrt5}\left(X-\frac32\right)$$
$$=\frac14\Big(2+2-2+0\Big)+\frac15\left(2\times-\frac32+2\times-\frac12+(-2)\times\frac12+0\times\frac32\right)\left(X-\frac32\right)=\frac12+\frac15\times(-5)\left(X-\frac32\right)=\boxed{-X+2=p(\mathrm{R})}$$

d. Montrer que l'ensemble Σ possède un minimum qu'on déterminera.

En utilisant le polynôme R, on a : $\Sigma=\left\{\sum_{i=0}^{3}|\mathrm{R}(i)-\mathrm{P}(i)|^2\,;\,\mathrm{P}\in\mathrm{F}\right\}=\{\|\mathrm{R}-\mathrm{P}\|^2\,;\,\mathrm{P}\in\mathrm{F}\}$

Or, d'après le cours : $\inf\{\|\mathrm{R}-\mathrm{P}\|^2\,;\,\mathrm{P}\in\mathrm{F}\}=d(\mathrm{R},\mathrm{F})^2=\|\mathrm{R}-p(\mathrm{R})\|^2$ autrement dit $\boxed{\|\mathrm{R}-p(\mathrm{R})\|^2\text{ réalise bien le minimum de }\Sigma}$

On peut calculer ce minimum : $\|\mathrm{R}-p(\mathrm{R})\|^2=(2-2)^2+(2-1)^2+(-2-0)^2+(0+1)^2=\boxed{6=\|\mathrm{R}-p(\mathrm{R})\|^2}$

Remarques suite à la correction des copies

EXERCICE N° 1

1. a. **Vous devez répondre à la question qui est posée!** On vous demande un DL_3 pas un DL_5 ou un DL_7...
Votre réponse finale (celle qui est encadré) doit être un DL_3 même si vous avez calculé plus de terme que nécessaire pour l'obtenir.
J'ai eu seulement 5 DL_3, 1 DL_5 et 1 DL_7 corrects...autrement dit moins de 50 % de réponses justes à cette question triviale...
C'est déprimant! Il est urgent que vous **ayez un regard critique sur vos réponses!**
$1-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ ou $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ ne peuvent convenir puisque :
- la fonction Arctan est impaire donc son DL n'a que des termes d'indices pairs
- le premier terme du DL donne un équivalent et donc la limite or $\text{Arctan}\, x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (donc pas de début à 1!)

A noter que, pour cette question, il n'est pas nécessaire de faire figurer sur la copie le raisonnement qui vous a permis d'obtenir ce DL (« Rappeler » n'est pas « Démontrer »)

b. Dans l'argument de continuité, on doit retrouver deux choses (rarement présente dans vos copies) : « $t \neq 0$ sur $[1,+\infty[$ » et « Arctan est continue sur $\mathbb{R}$ » (je rappelle que $\text{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ Ne pas confondre le domaine de définition et l'image!)
Il s'agissait donc d'étudier la singularité en $+\infty$: trop peu d'entre vous pense à utiliser la question précédente qui permettait d'obtenir un équivalent de $f(t)$ en $+\infty$.
Dans un sujet, une question de cours a toujours pour objectif de rappeler un résultat utile pour la suite
Beaucoup de copies signalent « $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ » c'est vrai mais ça ne permet pas de conclure sur la convergence ($\dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge). Pourtant, des étudiants s'arrêtent à cette limite : pense-t-il pouvoir prolonger par continuité en $+\infty$?
Il fallait passer par un critère d'équivalence : **la rédaction du critère d'équivalent est encore très perfectible dans vos copies**.
Voici ce que je voudrais :
« $f(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{3t^2}$ or $\left[t \mapsto \dfrac{1}{3t^3}\right]$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann avec $\alpha = 3 > 1$) donc f est intégrable en $+\infty$ et l'intégrale converge »
Or, dans vos copies, je trouve trop d « à peu prés » : « $\dfrac{1}{3t^3}$ est intégrable » (confusion fonction/expression)
ou « $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est intégrable » (la fonction est intégrable mais l'intégrale est convergente)

c. Des choix parfois surprenants lorsque l'IPP est tentée...mais vous baissez bien souvent les bras abandonnant trop rapidement sur ces questions « classiques » qui vont classer le gros des étudiants. Dommage!
Ceux qui ont traité l'IPP ne repère malheureusement pas des primitives usuelles dans l'intégrale post-IPP :
$\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \left[-\ln t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^{+\infty}$ où la limite en $+\infty$ s'obtient par : $-\ln t + \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ln 1 = 0$ car $\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t} \sim_{+\infty} \dfrac{\sqrt{t^2}}{t} \sim_{+\infty} \dfrac{t}{t} \sim_{+\infty} 1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$

2. a. **Lorsqu'un exposant n'est pas un entier, il faut passer en écriture exponentielle**.
Ici, a est un réel >0 quelconque donc $g(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+e^{a\ln t})}$ et g est continue sur $]0,+\infty[$ (ouvert en 0!)
Il y a deux singularités à étudier (pas seulement celle en $+\infty$)

b. **Trop d'étudiants n'ont pas encore acquis le principe du changement de variables**.
En posant $t = \varphi(x)$ on modifie l'élément différentiel $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x$ et les bornes « si t tend vers a, x tend vers $\varphi(a)$, etc... »
Ici : $t = \dfrac{1}{x}$ alors $\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ et $t\left|\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix}\right. \Leftrightarrow x\left|\begin{matrix}0\\+\infty\end{matrix}\right.$ (si $t \to 0^+$ alors $x = \frac{1}{t} \to +\infty$ si $t \to +\infty$ alors $x = \frac{1}{t} \to 0$)
Tous les éléments doivent alors être remplacés en même temps : $\mathrm{I}_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^a\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$
Le « - » apparu dans l'élément différentiel va permettre de remettre les bornes « dans le bon ordre » et il reste à simplifier (voir corrigé) pour obtenir le résultat voulu.
Une fois cela acquis, il manque encore bien souvent l'hypothèse sur φ pour le changement de variables $t = \dfrac{1}{x} = \varphi(x)$:

φ doit être C^1, strictement monotone donc bijective sur $]0,+\infty[$.

c. Le sujet vous propose d'écrire $2\mathrm{I}_a = \mathrm{I}_a + \mathrm{I}_a$ et il vous a donné deux écritures différentes de I_a. Il faut donc exploiter les deux écritures données! L'une des I_a sera écrite avec l'écriture initiale et l'autre avec l'écriture de 2.b. Il reste à exploiter la linéarité de l'intégrale pour observer une simplification bienvenue...

EXERCICE N° 2

1. a. Seule question qui a été, à peu prés, traitée par tous. Le plus souvent, vous utilisez une règle de d'Alembert...encore qu'on pouvait être plus efficace en utilisant des résultats du cours.

b. Très décevant pour une question pourtant très simple et classique...

Le cours dit que la somme de la série entière est au moins définie sur $]-R,R[$ mais, pour obtenir le domaine de définition, il faut étudier la convergence aux bords de ce domaine. Bien souvent, vous distinguez deux cas et vous invoquez une série alternée lorsque $x=-1$...alors qu'on pouvait conclure très facilement à une CVA aux deux bords par un critère d'équivalence !

c. Très peu de réussite...mais c'était une question difficile du sujet où toutes les pistes proposées sont valorisées.

La question restait très ouverte car plusieurs calculs peuvent aboutir mais le DSE du cours $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$ pour $|x|<1$ était un incontournable dans toutes les approches proposées.

L'approche la plus souvent utilisée dans les copies est la méthode n^o 1 du corrigé : $\displaystyle xS(x)=\int_0^x \ln(1-t)\mathrm{d}t$ mais la recherche de la primitive pose problème. A noter que ce n'est pas n'importe quelle primitive : c'est celle qui s'annule en 0 car $xS(x)$ vaut 0 si $x=0$.

J'ai parfois vu : $\displaystyle xS(x)=\int^x \big(-\ln(1-t)\big)\mathrm{d}t$ ce qui indique que vous n'avez pas compris la notation $\displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ (utiliser probablement en PTSI puisque personnellement je n'aime pas cette notation donc je l'utilise peu) : cette notation désigne la famille des primitives de f ainsi, par exemple : $\displaystyle\int^x t^2\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}+K$ où K est un réel ou $\displaystyle\int^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\mathrm{Arctan}(x)+K$ où K est un réel

Revenons à notre primitive $\displaystyle\int^x \ln(1-t)\mathrm{d}t$: certains ont voulu exploiter $\displaystyle\int^x \ln t\,\mathrm{d}t=x\ln x-x+K$ où K est réel (oubliant souvent le K...)

C'est possible mais, à chaque fois que cela a été tenté, il y a eu une erreur. Revenons à des notations plus classiques pour éviter ces erreurs : vous savez que si $g(x)=\ln x$ alors $G(x)=x\ln x-x$ en est une primitive aussi pour $h(x)=-\ln(1-x)=u'(x)\ln u(x)$ avec $u(x)=1-x$ alors une primitive sera $H(x)=G(u(x))=(1-x)\ln(1-x)-(1-x)$.

Par contre, cette primitive n'est pas la primitive qu'il nous faut car elle ne s'annule pas en 0 !

On sait que : $xS(x)=H(x)+K$ et, en $x=0$: $0=H(0)+K\Leftrightarrow K=1$ donc finalement : $xS(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$

Voici une autre méthode (en plus des deux méthodes du corrigé) inspirée par l'approche d'une des copies que j'ai terminé :

Méthode n° 3 : Par dérivation terme à terme, on a, pour $|x|<1$:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\times nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}\quad\text{d'où}\quad x^2S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}=-\ln(1+x)-x$$ Attention, la somme débute à $k=1$ et pas $k=0$...

Aussi, pour $x\neq 0$ et $|x|<1$: $\displaystyle S'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)+\frac{1}{x}$ et, alors en prenant une primitive : $\displaystyle S(x)=\int^x\left(-\frac{1}{t^2}\times\ln(1-t)\right)\mathrm{d}t+\ln x+K$

où K est une constante à préciser. On peut utiliser une IPP pour déterminer la primitive manquante :

$$\int^x\Big(\underbrace{-\frac{1}{t^2}}_{=u'(t)}\times\underbrace{\ln(1-t)}_{=v(t)}\Big)\mathrm{d}t=u(x)v(x)-\int^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\times\ln(1-x)-\int^x\underbrace{\frac{1}{t}\times\frac{-1}{1-t}}_{\text{décompostion en élements simple}}\mathrm{d}t=\frac{\ln(1-x)}{x}+\int^x\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t$$

Ainsi : $\displaystyle S(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}+\ln x-\ln(1-x)+\ln x+K$ soit $\displaystyle S(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+K$ et on détermine K avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}S(x)=S(0)$

Or : $\displaystyle S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ donne $S(0)=0$ et : $\displaystyle\frac{\ln(1-x)}{x}\sim_0\frac{-x}{x}\sim_0-1$ d'où $\displaystyle\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+K\xrightarrow[x\to 0]{}-1+0+K$ d'où $K=1$

Finalement, on retrouve bien : $\displaystyle S(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)+1$ si $x\in]-1,1[-\{0\}$ et $S(0)=0$

d. Il s'agit de mettre en avant le résultat de cours sur les séries entières qui permet de conclure :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=S(1)=\lim_{x\to 1^-}S(x)$ parce que la somme d'une série entière est continue sur son domaine de définition.

2. a. Il s'agit ici d'étudier la convergence d'une intégrale avec $a<1$ fixé...Il n'y avait donc, ici, que la singularité en 0 à étudier ! Il est très regrettable que presque aucun étudiant ne « pense » à utiliser un DL du numérateur pour obtenir la limite en $t=0$ qui permettait d'obtenir un prolongement par continuité...

b. Une question simple...et pourtant très peu réussie !

Il s'agit d'utiliser les DSE du cours pour établir que $f(x)$ peut s'écrire comme la somme d'une série entière sur $]-r,r[$ pour $r>0$ à déterminer. **Attention** ! Un développement $\sum a_kx^n$ est un DSE seulement s'il n'y a pas d'exposant k négatifs.

c. La question nécessite d'utiliser le résultats précédents en invoquant le théorème d'intégration terme à terme pour les séries entières.

Mais pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué...Certains ont utilisés le théorème d'intégration terme à terme pour les intégrales généralisées : c'était possible mais beaucoup, beaucoup, plus long !

3. Cette question n'a quasiment jamais été traité alors qu'elle était totalement prenable à condition d'admettre les résultats des autres questions ! Cette question finalise l'exercice dressant le bilan des questions : c'est donc une question qui mérite qu'on s'y attarde...

La convergence de l'intégrale qui n'a pas été justifier dans les questions précédentes pour la singularité en 1 s'obtient par la définition du cours pour une intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^1\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{a\to 1^-}\int_0^a\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$

En utilisant alors la question 2c, on ramène le problème à un calcul de limite de S : $\displaystyle\lim_{a\to 1^-}\big(-S(a)\big)$ existe-t-elle dans $\mathbb{R}$?

Il s'agissait alors d'utiliser la continuité de la somme d'une série entière sur son domaine de définition : avec 1b, $\displaystyle\lim_{a\to 1^-}S(a)=S(1)$

La question 1c permettait d'obtenir la valeur exacte de la limite au lieu de l'exprimer comme la somme d'une série...

Bilan globale suite à la correction des copies

Je note sur 24 au final pour avoir une moyenne de 8,6/20 (on est donc globalement 1 point en dessous des moyennes d'épreuves usuelles)
6 copies réalisent un performances correctes : 2 bonnes copies (14 et 14,6) dominent largement un second groupe de deux copies (11,8 et 11,4) qui devance encore assez nettement deux autres copies (10.7 et 10.1).
3 copies seraient proche mais probablement sous la moyenne d'épreuves (entre 8.2 et 9.3)
Les 7 copies suivantes décrochent beaucoup par rapport à la moyenne d'épreuve : 4 copies d'abord (entre 6.1 et 7,6) puis 3 copies sont inquiétantes (entre 3.2 et 4.9)

EXERCICE N° 3

Puisque c'est un extrait du sujet, nous disposons du rapport de l'épreuve ce qui permet de situer votre performance par rapport à celle de la cohorte du concours 2017.
Les remarques en italique sont celles du rapport du jury que vous pouvez trouver en intégralité sur le site de la banque PT.

1. J'adhère à toutes les critiques du rapport :
« *Environ la moitié des candidats justifie correctement le caractère dérivable de la fonction F. Certains se contentent décrire que la fonction F est dérivable, mais ne justifient rien. D'autres disent qu '« une intégrale est toujours dérivable ». Il est clair qu'écrire que « F est dérivable comme produit de fonctions qui le sont » n'est pas suffisant : on demande une justification. [...] Certains candidats ont pensé avoir trouvé une primitive de $[x \mapsto e^{x^2}]$ sans même vérifier en re-dérivant. Le jury a apprécié les candidats qui reconnaissaient une intégrale fonction de sa borne supérieure, ou faisaient appel au théorème fondamental de l'analyse, en expliquant que la fonction $\left[x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt\right]$ était l'unique primitive s'annulant en zéro de la fonction $[x \mapsto e^{x^2}]$* »

2. Là encore, le rapport est explicite : « *La majorité des candidats sait que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par contre, peu citent le théorème d'intégration terme à terme. En ce qui concerne le produit de Cauchy, la valeur du rayon de convergence n'est pas toujours donnée.[...]Cette question s'est donc révélée très classante.* »
Je rappelle qu'un DSE ne vaut rien sans le rayon de convergence (ou l'intervalle de convergence où il est valable).

3. En aucun cas, il ne s'agissait de résoudre l'équation différentielle...mais seulement de vérifier $\mathrm{F}'(x) = -x\mathrm{F}(x) + 1$ en calculant $\mathrm{F}'(x)$.
Je passe sur les dérivées surprenante d'un produit de fonction ($(uv)' \neq u'v'$) ou de la composée $\left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2}$ et pas e^{-x^2}...)
Vos vérifications sont parfois inutilement compliquées : l'essentiel de la question repose sur le fait qu'« *il fallait faire apparaître d'une façon ou d'une autre l'égalité entre la valeur de la dérivée de l'intégrale fonction de sa borne supérieure en x et e^{x^2}* »

4. Grand classique et ça se sent : « *La majorité des candidats a obtenu la relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geqslant 0$* ». Ne pas traiter la question, c'est donc prendre du retard sur la majorité des candidats... Certaines rédactions sont encore très perfectibles :
n'oubliez pas d'insister sur les théorèmes utilisés aux différentes étapes du raisonnement : intégration terme à terme, linéarité possible sur les sommes et surtout l'unicité du développement en série entière.
Attention à bien quantifier la relation de récurrence càd indiquer pour quels n la relation est vraie.

5. Là aussi, ce type de question, sans doute fortement travaillé en classe, est finalement beaucoup traitée même si le fait que $a_0 = 0$ n'est pas toujours repéré :
« *Tous les candidats n'ont pas fait attention au fait que a_0 était nul. Certains l'affirment, mais ne donnent aucune justification. Notons que la question précédente ne donne aucune informations sur la valeur de a_0, seul le calcul de* $\mathrm{F}(0)$ *permet de conclure. Sinon, si une grande proportion de candidats obtient l'expression de a_{2p+1} en fonction de p, le calcul est souvent trop succinct, sans réelle indication que l'on a multiplié au numérateur et au dénominateur par les termes pairs.* »
Personnellement, je trouve le sujet mal formulée car la question « donner l'expression de a_{2p} en fonction de p »encourage à partir de a_{2p} en itérant la relation jusqu'à a_0...La nullité de a_0 ne pouvant être repérée qu'en question 6.

6. Dans cette question, **il fallait absolument évoqué l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy** pour être assuré d'avoir bien obtenu le DSE de F : on a deux expressions de la solution de $\begin{cases} y' = -2xy + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ donc ces expressions sont forcément égales.

PROBLÈME

Partie I

Dans cette partie, les questions 1, 2 et 3 sont des questions de cours.

1. Seulement 50% des étudiants donne une expression correcte du coefficient du produit matriciel.
Trois étudiants écrivent même que le coefficient (i, j) de la matrice AB est le produit $[\mathrm{A}]_{ij}[\mathrm{B}]_{ij}$...Les bras m'en tombent!
La définition de la trace n'est pas toujours mise en avant mais, en général, le résultat $[\mathrm{A}^{\mathrm{T}}]_{ij} = [\mathrm{A}]_{ji}$ est restituée.
2. Question probablement la mieux réussie. Mais, j'ai trouvé des horreurs parfois écrites :
$\mathrm{tr}(\mathrm{MN}) \neq \mathrm{tr}(\mathrm{M}) \times \mathrm{tr}(\mathrm{N})$ (Contre-ex : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{MN} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ d'où $\mathrm{tr}(\mathrm{MN}) = 5 \neq 5 \times 0 = \mathrm{tr}(\mathrm{M}) \times \mathrm{tr}(\mathrm{N})$)
Par contre, on a : $\mathrm{tr}(\mathrm{MN}) = \mathrm{tr}(\mathrm{NM})$ et, pour les déterminants : $\det(\mathrm{MN}) = \det(\mathrm{M}) \times \det(\mathrm{N}) = \det(\mathrm{NM})$
3. Majoritairement, vous pensez bien que c'est une utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\varphi(\mathrm{A},\mathrm{B})\right| \leqslant \|\mathrm{A}\| \times \|\mathrm{B}\|$
Toutefois, personne n'a trouvé le bon choix de matrice B à utiliser. Certains m'ont proposé d'utiliser $\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$ car alors $\|\mathrm{B}\| = \sqrt{n}$ mais, par contre : $\varphi(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{A}]_{ii} = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$ et pas la somme de tous les coefficients de A comme on le voulait. Il fallait donc utiliser la matrice B dont tous les coefficients valent 1.
4. Attention au SENS de ce que vous écrivez : les espaces $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux signifie $\forall \mathrm{S} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}), \forall \mathrm{A} \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(\mathrm{S},\mathrm{A}) = 0$
et pas $\varphi(\mathrm{S}_n(\mathbb{R}), \mathrm{A}_n(\mathbb{R}))$ qui n'a aucun SENS car le produit scalaire est définie entre des vecteurs...pas entre des sous-espace vectoriel!
J'avais fait la démonstration en TD le lundi précédent le DS...mais un seul étudiant a su la restituer.
Une autre démonstration que celle que j'avais faite a été proposé par un autre étudiant : pour $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$
$$\varphi(\mathrm{S},\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [\mathrm{S}]_{ij}[\mathrm{A}]_{ij} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [\mathrm{S}]_{ji} \times -[\mathrm{A}]_{ji}}_{\text{car } [\mathrm{S}]_{ij} = [\mathrm{S}]_{ji} \text{ et } [\mathrm{A}]_{ji} = -[\mathrm{A}]_{ij}} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [\mathrm{S}]_{ji} \times [\mathrm{A}]_{ji} = -\varphi(\mathrm{S},\mathrm{A})}_{\text{en échangeant les rôles de } i \text{ et } j \text{ dans la somme}} \quad \text{donc} \quad \varphi(\mathrm{S},\mathrm{A}) = -\varphi(\mathrm{S},\mathrm{A}) \Rightarrow 2\varphi(\mathrm{S},\mathrm{A}) = 0 \Rightarrow \varphi(\mathrm{S},\mathrm{A}) = 0$$
5. **a.** Une question très basique que vous devez tous savoir faire! Souvent vous oubliez de justifier le caractère libre de la famille génératrice trouvée...
   b. Dans la correction, j'ai utilisé la caractérisation.
   Dans vos copies, vous avez, en général, choisi d'orthonormaliser la base $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ où $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ trouvée en a)
   Vous perdez souvent beaucoup de temps pour calculer vos produits scalaire en recalculant toute la matrice ${\mathrm{A}_1}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_2$ pour en prendre la trace alors qu'il suffit d'exploiter le résultat de 1.b. pour gagner en temps de calcul : $\varphi(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times 0$
   (le produit scalaire s'obtient en faisant la somme des produits coefficients par coefficients...)
   Il n'était donc pas nécessaire de mettre en?uvre l'algorithme de Gram-Schmidt puisque la famille $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ est orthogonale.
   Pour obtenir une base orthonormée, il suffit de normer les vecteurs : $(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{A}_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{A}_2\right)$ est une base orthonormée de F
   Dés lors, d'après le cours : $$\mathrm{A}' = \varphi(\mathrm{A},\mathrm{N}_1)\mathrm{N}_1 + \varphi(\mathrm{A},\mathrm{N}_2)\mathrm{N}_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \varphi(\mathrm{A},\mathrm{A}_1)\mathrm{A}_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \varphi(\mathrm{A},\mathrm{A}_2)\mathrm{A}_2}_{\text{(il y a un } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ devant chacun des } \mathrm{N}_i \text{ qui se factorise)}} = \underbrace{\frac{1}{2} \times 1 \times \mathrm{A}_1 + \frac{1}{2} \times 1\mathrm{A}_2}_{\varphi(\mathrm{A},\mathrm{A}_1) = 1 = \varphi(\mathrm{A},\mathrm{A}_2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   c. Même si vous n'aviez pas trouvé A', vous pouviez donner le résultat de cours :
   puisque A' est le projeté orthogonal de A sur F (càd $\mathrm{A}' = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$) alors $d(\mathrm{A},\mathrm{F}) = \|\mathrm{A} - \mathrm{A}'\|$

Partie II

1. Attention au SENS de ce que vous écrivez : « une somme de produit de polynômes »est un polynôme...pas un réel!
La preuve : $\Psi(\mathrm{P},\mathrm{P}) = 0 \Rightarrow \mathrm{P} = 0$ est très souvent incomplète car l'un des deux arguments (souvent le 2ème) est manquant :
$\Psi(\mathrm{P},\mathrm{P}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(0)^2 + \mathrm{P}(1)^2 + \mathrm{P}(2)^2 + \mathrm{P}(3)^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{P}(0) = 0 = \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(3)$ car somme nulle de réels positifs
Le polynôme P possède donc 4 racines distinctes or $\deg(\mathrm{P}) \leqslant 3$ aussi $\mathrm{P} = 0$ (plus de racines que son degré)
2. Beaucoup d'étudiants ne parviennent à calculer les 3 produits scalaires soulignant des difficultés de compréhension de l'énoncé.
Je rappelle qu'**un produit scalaire est un réel** donc obtenir des résultats égaux à des polynômes est une aberration...
$\Psi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \sum_{i=0}^{3} \mathrm{P}(i)\mathrm{Q}(i) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2) + \mathrm{P}(3)\mathrm{Q}(3)$ aussi les polynômes P et Q sont à évaluer aux réels 0, 1, 2 et 3
Certain font les calculs avec un autre produit scalaire de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ (à savoir $< a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d, a'\mathrm{X}^3 + b'\mathrm{X}^2 + c'\mathrm{X} + d' >= aa' + bb' + cc' + dd'$) au lieu d'utiliser le produit scalaire du sujet qui utilise des évaluations des polynômes en 0, 1, 2 et 3 :
$\Psi(1,\mathrm{X}) = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3$ car $\mathrm{P} = 1$ conduit à $\mathrm{P}(i) = 1$ quelque soit i et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}$ conduit à $\mathrm{Q}(0) = 0$, $\mathrm{Q}(1) = 1$, $\mathrm{Q}(2) = 2$ et $\mathrm{Q}(3) = 3$
Parfois, l'erreur n'a pas été commise en 2a) mais en 2b) lors de la mise en place de l'algorithme de Gram-Schmidt :
$\mathrm{P}_0 = \frac{1}{\|1\|}$ où $\|1\| = \sqrt{\Psi(1,1)} = \sqrt{1^2 + 1^1 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et pas $\|1\| = 1$ car $1 = \sqrt{<1,1>} = \sqrt{1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0}$
3. Questions peu traitées. Je rappelle qu'**un isomorphisme est une application linéaire bijective**. La méthode la plus simple pour obtenir la bijectivé de u était de calculer $\det(u) = \det(\mathrm{M})$ en utilisant la matrice associée à u dans les bases canoniques. Connaissant la bijectivité de u, la question 2b devenait triviale : $\forall i \in [\![0,3]\!]\mathrm{R}(i) = x_i \Leftrightarrow u(\mathrm{R}) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow \mathrm{R} = u^{-1}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ uniquement déterminé. Le calcul des produits scalaire pour calculer $p(\mathrm{R})$ ne nécessite que de connaître $\mathrm{R}(0) = x_0$, $\mathrm{R}(1) = x_1$, $\mathrm{R}(2) = x_2$ et $\mathrm{R}(3) = x_3$: il n'est pas nécessaire d'expliciter R. Enfin, le gros travail de la question 3.d. était d'interpréter le calcul du minimum demandé en un calcul de distance pour utiliser le projeté précédent.