DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Calculatrice non autorisée - Durée : 4h

Chacun des exercices compte pour une part proportionnelle à la durée conseillée dans le barème final

EXERCICE N° 1 *Durée conseillée : 30 minutes* Les deux questions sont indépendantes

1. **a.** Rappeler le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\operatorname{Arctan} x$

b. Justifier que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ est convergente.

c. Calculer I à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit $a > 0$ fixé, on considère l'intégrale $\mathrm{I}_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$

a. Justifier la convergence de I_a

b. En utilisant le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$, montrer que $\mathrm{I}_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)} \mathrm{d}x$.

c. Calculer alors $2\mathrm{I}_a = \mathrm{I}_a + \mathrm{I}_a$ puis en déduire I_a

EXERCICE N° 2 *Durée conseillée : 1 heure*

1. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

a. Déterminer le rayon R de convergence de cette série entière.

b. Justifier que sa somme S est une fonction définie sur l'intervalle fermé $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$

c. Préciser la valeur de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$

d. Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

2. On fixe $a \in]0,1[$.

a. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \mathrm{d}x$

b. Prouver que $\left[f : x \mapsto \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}\right]$ est développable en série entière en 0 avec : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k+2}\right) x^k$ pour $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

c. Démontrer alors que $\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$

3. Justifier la convergence et préciser la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2} \mathrm{d}x$ à l'aide de la question précédente.

EXERCICE N° 3 ***Extrait du sujet Maths C de 2017*** *Durée conseillée : 1 heure*

Soit F la fonction qui, à tout réel positif x, associe : $e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$

2. En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'(x) = -2xy(x) + 1 \quad (\mathscr{E})$

4. En cherchant le développement en série entière de F sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geqslant 0$.

5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.

6. En déduire le développement en série entière de F.

Problème **Extrait d'un sujet retravaillé de Banque PT de 2009** *Durée conseillée 1h30*

Partie I

On considère l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients de la diagonale de A et A^T la matrice transposée de A.
On définit l'application φ de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\ \varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A^T B)$
On convient de noter $[A]_{ij}$ le coefficient situé ligne i colonne j d'une matrice nommée A.

1. a. Pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, rappeler l'expression du coefficient $[AB]_{ij}$ à l'aide des coefficient des matrices A et B.

b. Démontrer alors que, pour $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ij}[B]_{ij}$

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[A]_{ij}^2}$

4. On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$.

5. On considère dans cette question uniquement que $n = 2$.
On désigne par F le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ défini par : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

a. Donner une base de F

b. Déterminer la matrice A', image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, par la projection orthogonale sur F

c. En déduire la distance de A à F

Partie II

On définit l'application ψ de $\mathbb{R}_3[X]^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2,\quad \psi(P,Q) = \sum_{i=0}^{3} P(i)Q(i)$

1. On admet que ψ est bilinéaire et que $\psi(P,Q) = \psi(Q,P)$ pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$.
Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ en vérifiant les dernières hypothèses nécessaires pour cela.

2. Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X)$

a. Calculer $\psi(1,1)$, $\psi(1,X)$ et $\psi(X,X)$

b. $\mathscr{B}' = (P_0, P_1)$ est la base orthonormale de F pour le produit scalaire ψ obtenu en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $\mathscr{B}$.
Déterminer explicitement les polynômes P_0 et P_1

3. On fixe $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (2, 2, -2, 0)$ et on considère l'ensemble de réels $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^{3} |x_i - P(i)|^2 ; P \in F \right\}$

a. On considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ telle que $u(P) = \Big(P(0), P(1), P(2), P(3)\Big)$ dont on admet la linéarité.
Justifier que u est un isomorphisme.

b. En déduire qu'il existe un unique polynôme R de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0,3]\!],\ R(i) = x_i$
Attention ! On ne demande pas d'expliciter le polynôme R

c. Déterminer le projeté orthogonal $p(R)$ de R sur le sous-espace vectoriel F pour le produit scalaire ψ

d. Montrer que l'ensemble Σ possède un minimum qu'on déterminera.