PROBLÈME D'ANALYSE

Les trois parties de ce problème sont totalement indépendantes mais traitent toutes d'intégrales généralisées

Partie I (environ 30 min)

On considère les intégrales suivantes : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-i)^2}$, $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ et $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

1. Justifier la convergence de chacune des intégrales et rappeler la valeur de K

• Pour K, on connaît une primitive usuelle de $f = \left[x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right]$ qui est continue sur $[0,+\infty[$ vu que $1+x^2 \neq 0$:

$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \Big[\operatorname{Arctan} x\Big]_0^{\mathrm{A}} = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \operatorname{Arctan}\mathrm{A} = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\text{K converge (noté CV) et } \mathrm{K} = \frac{\pi}{2}}$$

• $g = \left[x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^2}\right]$ est aussi continue sur $[0,+\infty[$ vu que $1+x^2 \neq 0$ et :

En $+\infty$: $g(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x^4}$ or $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x^4}\right]$ est une fonction de Riemann intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque $\alpha = 4 > 1$ autrement dit, par critère d'équivalence, g est intégrable sur $[1,+\infty[$. Dès lors :

$$\mathrm{J} = \underbrace{\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x}_{\mathrm{CV}(g\ \mathrm{C}^0 \text{ sur } [0,1])} + \underbrace{\int_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x}_{\mathrm{CV}(g \text{ est intégrable sur } [1,+\infty[)} \Rightarrow \boxed{\text{J converge}}$$

• Pour I, $h = \left[x \mapsto \dfrac{1}{(x-i)^2}\right]$ est continue sur $[0,+\infty[$ puisque $x - i \neq 0$ vu que x est réel et : $|h(x)| = \dfrac{1}{|x-i|^2} = \dfrac{1}{x^2+1} = f(x)$ or on sait que f est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc h est aussi intégrable sur $[0,+\infty[$ et, par suite, $\boxed{\text{I converge}}$

2. En déduire l'existence de l'intégrale $\mathrm{K}-\mathrm{J}$ qu'on exprimera sous la forme d'une intégrale
Calculer J en réalisant une intégration par parties dans l'intégrale $\mathrm{K}-\mathrm{J}$

Par linéarité de l'intégrale (où toutes les intégrales convergent) :

$$\mathrm{K}-\mathrm{J} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{K}-\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} \times \frac{x}{2}\mathrm{d}x}$$

On réalise une intégration par parties (IPP) avec u et v de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ où :

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{x}{2} \\ v'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = a'(x)\times a(x)^{-2} \text{avec } a(x) = 1+x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2} \\ v(x) = \dfrac{a(x)^{-2+1}}{-2+1} = -\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_0^{+\infty} = \left[-\frac{x}{2(1+x^2)}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2(1+x^2)} - 0 = 0 \quad \text{car} \quad \frac{x}{2(1+x^2)} \sim_{+\infty} \frac{1}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

L'IPP est donc pertinente et les intégrales de cette IPP sont toutes de même nature convergentes (puisque $\mathrm{K}-\mathrm{J}$ est convergente) : $\mathrm{K}-\mathrm{J} = 0 - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \times -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{K}}{2}$ et donc $\boxed{\mathrm{J} = \dfrac{\mathrm{K}}{2} = \dfrac{\pi}{4}}$

3. Calculer enfin la valeur de I

On sépare les parties réelle et imaginaire de I qui sont toutes les deux absolument convergentes puisque I l'est.

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-i)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(x+i)^2}{(x-i)^2(x+i)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2ix-1}{(|x-i|^2)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2ix-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

autrement dit : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x + i\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

Par linéarité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{(x^2+1)-2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x - 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \mathrm{K}-2\mathrm{J} = \frac{\pi}{2} - 2\times\frac{\pi}{4} = 0$

et : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x =_{a(x)=1+x^2} \int_0^{+\infty} a'(x)\times a(x)^{-2}\mathrm{d}x = \left[\frac{a(x)^{-2+1}}{-2+1}\right]_0^{+\infty} = \left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_0^{+\infty} = 0+1 = 1$ d'où $\boxed{\mathrm{I} = i}$

On considère la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big((1+x)^n - 1\Big)e^{-x}\mathrm{d}x$

1. Justifier la convergence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

La fonction $f = \Big[x \mapsto \big((1+x)^n - 1\big)e^{-x}\Big]$ est continue sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions usuelles donc sur $[0,+\infty[$.
On étudie la singularité en $+\infty$: $\quad f(x) \sim_{+\infty} x^n e^{-x} \quad$ puisque $(1+x)^n - 1$ est polynômiale. *Attention ! Pas de prolongement en $+\infty$!*
Méthode n° 1 $\quad \dfrac{f(x)}{e^{-\frac{x}{2}}} \sim_{+\infty} x^n e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad$ par croissance comparée donc $f(x) = o_{+\infty}\Big(e^{-\frac{x}{2}}\Big)$ or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc, par la règle du o, on peut conclure que $\boxed{\mathrm{I}_n \text{ est (absolument) convergente}}$
Méthode n° 2 $\quad x^2 f(x) = x^{n+2}e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad$ par croissance comparée donc $f(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ or $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\right]$ est intégrable en $+\infty$ (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc f est aussi intégrable en $+\infty$ ce qui assure que $\boxed{\mathrm{I}_n \text{ converge}}$

2. Démontrer que $\quad \mathrm{I}_n = n + n\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

On réalise une intégration par parties (IPP) sur I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec : $\begin{cases} u(x) = (1+x)^n - 1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = n(1+x)^{n-1} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$
où u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. On examine la convergence de la partie intégrée :
$[u(x)v(x)]_0^{+\infty} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(-\big((1+x)^n - 1\big)e^{-x}\Big) - u(0)v(0) = \lim_{x\to+\infty}\Big(-f(x)\Big) - (0\times 1) = 0 \quad$ où f a été introduit en question n° 1
puisqu'en effet : $\quad -f(x) \sim_{+\infty} -x^n e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad$ par croissance comparée.
L'intégration par partie est pertinente et, puisque l'intégrale de départ I_n est convergente, toutes les intégrales de l'IPP sont convergentes et on a :

$$\mathrm{I}_n = 0 - \int_0^{+\infty} n(1+x)^{n-1} \times -e^{-x}\mathrm{d}x = +n\int_0^{+\infty}(1+x)^{n-1}\times e^{-x}\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty}\Big((1+x)^{n-1} - 1 + 1\Big)\times e^{-x}\mathrm{d}x$$

De sorte que, par linéarité(possible car les intégrales $\mathrm{I}_{n-1} = \displaystyle\int_0^{+\infty}\Big((1+x)^{n-1} - 1\Big)\times e^{-x}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1$ convergent) :

$$\mathrm{I}_n = n\Big(\mathrm{I}_{n-1} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x\Big) = n\big(\mathrm{I}_{n-1} + 1\big) \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{I}_n = n + n\mathrm{I}_{n-1}}$$

3. Exprimer alors I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. *Aide : On pourra vérifier que :* $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}$

Méthode n° 1 : La question initiale guide vers un calcul de I_n par itération de la relation trouvée en 2 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n = n + n\mathrm{I}_{n-1} = n + n\big((n-1) + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}\big) &= n + n(n-1) + n(n-1)\big((n-2) + (n-2)\mathrm{I}_{n-3}\big) \\
&= n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\big(1 + 1\times \underbrace{\mathrm{I}_0}_{=0}\big) \\
&= n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n! \\
&= \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-3)!} + \cdots + \frac{n!}{0!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

Méthode n° 2 : Comme je donne le résultat, on peut procéder par récurrence sur n avec $\quad \mathrm{HR}_n$: « $\mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}$ »

- *Initialisation* : $\quad \mathrm{I}_1 = 1 + 1\times\mathrm{I}_0 = 1 + 1\times 0 = 1 \quad$ car $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty}(1-1)e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}x = 0$

  Pour $n = 1$: $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{1!}{(1-k)!} = \frac{1!}{0!} = 1 = \mathrm{I}_1 \quad$ aussi HR_1 est vérifiée

- *Hérédité* : On prouve $\quad \mathrm{HR}_n \Rightarrow \mathrm{HR}_{n+1} \quad$ donc on sait $\quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!} \quad$ et on veut $\quad \mathrm{I}_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$

  D'après la question 2 : $\quad \mathrm{I}_{n+1} = n + 1 + (n+1)\mathrm{I}_n = n + 1 + (n+1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!} = (n+1) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-k)!}$

  Posons $p = k+1$ dans la somme alors : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{(n-k)!} = \sum_{p=2}^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1-p)!} \quad$ De plus : $n + 1 = \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-1)!}$

  On peut donc ajouter le premier terme dans la somme comme le terme d'indice $p = 1$ et : $\mathrm{I}_{n+1} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1-p)!}$

  Les indices étant muets, on peut substituer k à p et on a bien prouvé HR_{n+1}

- *Conclusion* : Par récurrence simple, on a obtenu que HR_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}}$

4. Pour quelles valeurs réelles de x les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}$ convergent-elles ? Donner alors leurs sommes.

Définir le produit de Cauchy de ces deux séries. Pour quelles valeurs de x est-il convergent ?

Il s'agit de deux séries de référence du cours :

- la première est la série de l'exponentielle qui converge absolument pour tout x réelle et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$

- la seconde est une série géométrique qui converge absolument pour $|x| < 1$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x \times \frac{1-0}{1-x} \Leftrightarrow \boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}}$$

D'après le cours, $\boxed{\text{le produit de Cauchy est la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times x^{(n-k)+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) x^{n+1}}$

D'après le théorème du cours, on sait qu'il converge (absolument) lorsque les deux séries qui le composent convergent absolument : $\boxed{\text{il est donc convergent lorsque } x \in]-1,1[}$

5. Démontrer enfin que : $\quad \forall x \in]-1,1[,\quad \dfrac{xe^x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$

Lorsque $x \in]-1,1[$, on sait que le produit de Cauchy est convergent et que sa somme vaut le produit des sommes des séries qui le composent donc, avec les résultats de II-4 : $\dfrac{xe^x}{1-x} = e^x \times \dfrac{x}{1-x} = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) x^{n+1}$

On pose $p = n+1$ dans cette somme : $\dfrac{xe^x}{1-x} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}\right) x^p$

Or, d'après 4 : $\dfrac{\mathrm{I}_p}{p!} = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{p!}{(p-k)!} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(p-k)!} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!}$ en posant $i = p-k$ soit $\dfrac{\mathrm{I}_p}{p!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}$ ($i = k$ car indice muet)

Finalement, on a bien obtenu : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\quad \dfrac{xe^x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n}$

Partie III (environ 60 min)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

1. Justifier que f est intégrable sur $]0,1]$ puis déterminer la valeur de $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ en posant $x=t^2$.

Par les théorèmes usuels, f est continue sur $]0,1]$ où $x\geqslant 0$, $\sqrt{x}\neq 0$ et $1+x\neq 0$.

En 0 : $f(x)\sim_0 \dfrac{1}{\sqrt{x}\times 1}=\dfrac{1}{x^{\frac12}}$ or $\left[x\mapsto \dfrac{1}{x^{\frac12}}\right]$ est une fonction de Riemann de référence intégrable sur $]0,1]$ car $\alpha=\dfrac12<1$

aussi, par critère d'équivalence, on peut conclure que $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1]}$

On pose $x=t^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=t$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & t \\ & 0 & \end{array}\begin{array}{|c}1\\0\end{array}$ où $[t\mapsto t^2]$ est C^1, strictement croissante donc bijective de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$

$\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t(1+t^2)}\times 2t\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^1=2\times\frac{\pi}{4}$ en identifiant une primitive usuelle soit $\boxed{\mathrm{I}=\dfrac{\pi}{2}}$

2. Pour tout entier n, on note f_n la fonction définie sur $]0,1]$ par : $f_n(x)=(-1)^n x^{n-\frac12}$.

a. Soit $n\in\mathbb{N}$, justifier que f_n est intégrable sur $]0,1]$ et établir que $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{n+\frac12}$

On a : $f_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt{x}}$ aussi, par les théorèmes usuels, f_n est continue sur $]0,1]$

<u>Méthode n° 1</u> :

Si $n\geqslant 1$ alors : $|f_n(x)|\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ car $n-\dfrac12>0$ aussi f_n se prolonge par continuité et l'intégrale est faussement généralisée

Si $n=0$ alors : $|f_0(x)|=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x^{\frac12}}$ est l'expression d'une fonction de Riemann intégrable sur $]0,1]$ puisque $\alpha=\dfrac12<1$

<u>Méthode n° 2</u> : $|f_n(x)|=x^{n-\frac12}=\dfrac{1}{x^{\frac12-n}}$ est une fonction de Riemann

Elle est intégrable en 0 si et seulement si $\dfrac12-n<1\Leftrightarrow-\dfrac12<n$ ce qui est toujours le cas pour $n\in\mathbb{N}$

Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est bien intégrable sur }]0,1] \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}}$

De plus : $\displaystyle\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-\frac12}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n-\frac12+1}}{n-\frac12+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+\frac12}-0$ car $n-\frac12+1=n+\frac12>0$ soit $\boxed{\displaystyle\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{n+\frac12}}$

b. Justifier que, pour $x\in]0,1[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$.

On a : $f_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt{x}}=\dfrac{(-x)^n}{\sqrt{x}}$ aussi, en utilisant la série géométrique de raison $q=-x$ avec $|q|<1$ si $x\in]0,1[$:

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=f(x)$

c. Rappeler les hypothèses à vérifier pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme à f.Sont-elles vérifiées ici ?

Puisque $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ pour $x\in]0,1[$, les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme seraient

$\boxed{\text{i) } f \text{ est continue sur }]0,1[\quad \text{ii) Pour tout } n \text{ entier, } f_n \text{ est intégrable sur }]0,1[\quad \text{iii) la série } \sum\int_{]0,1[}|f_n| \text{ est convergente}}$

$\boxed{\text{L'hypothèse i) est vérifiée}}$ (cf question III-1). $\boxed{\text{L'hypothèse ii) est aussi vérifiées}}$ (cf question III-2-a).

Pour iii), on a : $u_n=\displaystyle\int_{]0,1[}|f_n|=\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x=\frac{1}{n+\frac12}\sim_{n\to+\infty}\frac1n$ où $\dfrac1n>0$

Or, la série $\sum\dfrac1n$ est une série de Riemann divergente donc la série $\sum\displaystyle\int_{]0,1[}|f_n|$ est divergente d'après le critère d'équivalence et $\boxed{\text{l'hypothèse iii) n'est pas vérifiée}}$

d. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

On a : $f_n(t) = (-1)^n|f_n(t)|$ aussi $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}$

On repère ici une série alternée de terme général $(-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ qui tend bien vers 0 en décroissant donc, d'après le théorème de convergence des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ converge.

3. Soit $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R_N} = \mathrm{I} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}$ où $\mathrm{I} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ a été définie en question 1.

a. Établir que $\mathrm{R_N} = \int_0^1 (-1)^{\mathrm{N}+1}\frac{x^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}{1+x}\mathrm{d}x$ puis que $|\mathrm{R_N}| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1}$

On a : $\mathrm{R_N} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(f(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale

Alors, avec III-2-b : $\mathrm{R_N} = \int_0^1\left(\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\times(-x)^{\mathrm{N}+1}\times\frac{1-0}{1-(-x)}\right)\mathrm{d}x$ en utilisant le résultat sur les sommes géométriques autrement dit, en simplifiant : $\boxed{\mathrm{R_N} = \int_0^1 (-1)^{\mathrm{N}+1}\frac{x^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}{1+x}\mathrm{d}x}$

On exploite alors l'inégalité triangulaire (possible car il s'agit ici d'une intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0,1]$) :

$|\mathrm{R_N}| \leqslant \int_0^1\left|(-1)^{\mathrm{N}+1}\frac{x^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}{1+x}\right|\mathrm{d}x$ or $\left|(-1)^{\mathrm{N}+1}\frac{x^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}{1+x}\right| = \frac{x^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}{1+x} = x^{\mathrm{N}}\frac{\sqrt{x}}{1+x} \leqslant x^{\mathrm{N}}\times\frac{1}{1+0}$ pour tout $x\in]0,1[$

aussi : $|\mathrm{R_N}| \leqslant \int_0^1\left|(-1)^{\mathrm{N}+1}\frac{x^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}{1+x}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{\mathrm{N}}\mathrm{d}x$ par croissance de l'intégrale or : $\int_0^1 x^{\mathrm{N}}\mathrm{d}x = [\frac{x^{\mathrm{N}+1}}{\mathrm{N}+1}]_0^1 = \frac{1}{\mathrm{N}+1}$

Autrement dit : $\boxed{|\mathrm{R_N}| \leqslant \frac{1}{\mathrm{N}+1}}$

b. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$

Tout d'abord, on sait que la somme existe car on a déjà prouvé en III-2-d que la série est convergente.

Puisque la série converge : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}(\mathrm{I}-\mathrm{R_N}) = \mathrm{I}$ puisque $\mathrm{R_N}\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$ avec III-3-a

Mais $\mathrm{I} = \frac{\pi}{2}$ d'après III-1 donc : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}}$

Même si le théorème d'intégration terme à terme ne peut pas s'appliquer, on a quand même obtenu via cette égalité que la relation $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$ est vérifiée. Le théorème d'intégration terme à terme donne des conditions suffisantes...qui ne sont pas nécessaires.

Partie I (environ 1h15)

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$

Méthode 1 pour le cacul de χ_A (sans calcul de déterminant mais avec un peu d'astuce) :
On remarque que $A - 2I_3$ est la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent -1 aussi

$$\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3) = 3 - 1 = 2 \text{ en utilisant le théorème du rang.}$$

Si on note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicité, on peut donc supposer $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
Pour trouver la dernière valeur propre, on utilise la trace : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(A) = 3 \Leftrightarrow 2 + 2 + \lambda_3 = 4 \Leftrightarrow \lambda_3 = -1$

Or, χ_A est unitaire de degré 3 et on connaît ses trois racines complexes donc $\boxed{\chi_A(x) = (x+1)(x-2)^2}$

Méthode 2 pour le calcul de χ_A (avec un calcul de déterminant) :

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x+1 & x-1 & 1 \\ x+1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}} = (x+1) \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}}$$

Ainsi : $\boxed{\chi_A(x) = (x+1)(x-2)^2}$ puisque ce dernier déterminant est triangulaire.

2. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Méthode la plus rapide (possible uniquement pour les 5/2 à ce stade de l'année) :

A est une matrice symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, $\boxed{\text{A est diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R})}$

Méthode avec la CNS de diagonalisation

χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ (1) et on a : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ où $m(-1) = 1$ et $m(2) = 2$ sont les multiplicités des valeurs propres.
Comme -1 est valeur propre simple de A, $\dim E_{-1}(A) = \dim \mathrm{Ker}\,(A + I_3) = 1 = m(-1)$ (2a) Puis, avec le théorème du rang et $A - 2I_3$ ayant tous ses coefficients qui valent -1 : $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1 \Rightarrow \dim E_2(A) = \dim \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3) = 3 - 1 = 2 = m(2)$ (2b)
Mais alors : $\Big((1),\ (2a) \text{ et } (2b)\Big) \Leftrightarrow \boxed{\text{A est diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R})}$

3. Déterminer les valeurs propres et les sev propres de A

On connaît le polynôme caractéristique de A (voir question 1) : $\boxed{\chi_A(x) = (x+1)(x-2)^2}$ et, puisque A est diagonalisable :

$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}}$ et $\dim E_{-1}(A) = \dim \mathrm{Ker}\,(A + I_3) = 1$, $\dim E_2(A) = \dim \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3) = 2$

On précise $E_{-1}(A)$: $A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ aussi $(A + I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ or $\dim E_{-1}(A) = 1$

donc $\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Ker}\,(A + I_3) = \mathrm{Vect}(e_1) \text{ où } e_1 = (1,1,1)}$

On précise $E_2(A)$: on remarque $(A - 2I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - 2I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ aussi $e_2 = (1,-1,0)$ et $e_3 = (1,0,-1)$ sont dans $E_2(A)$ et sont non colinéaires or $\dim E_2(A) = 2$ donc $\boxed{E_2(A) = \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) \text{ où } e_2 = (1,-1,0) \text{ et } e_3 = (1,0,-1)}$

Remarques pour plus tard : On peut déterminer l'un des sev propre à l'aide de l'autre. En effet, en vertu du théorème spectral, les sev propres de A sont orthogonaux. Puisque $E_{-1}(A)$ est la droite vectorielle dirigée par $e_1 = (1,1,1)$ alors $E_2(A)$ est le plan normal à e_1 d'équation $1 \times x + 1 \times y + 1 \times z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$

4. La matrice A est-elle semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Les deux matrices ont la même trace. On calcule le polynôme caractéristique de B :

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\Big((x-2)x - (-1)1\Big) = (x-1)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^3$$ or, d'après I-2, $\chi_A(x) = (x+1)(x-2)^2$

et on peut conclure que $\boxed{\text{les matrices A et B ne sont pas semblables car } \chi_B \neq \chi_A}$

5. Proposer une matrice D diagonale semblable à A. On précisera la relation de similitude liant les matrices A et D qui fait intervenir une matrice de passage P à expliciter (le calcul de P^{-1} n'est pas demandée)

D'après I, on sait que la matrice A est diagonalisable. En réunissant des bases des deux sous-espaces propres de A, on obtient (avec les notations utilisées dans I-2) la base $(e_1, e_2, e_3) = \Big((1,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1)\Big)$ de diagonalisation de A de sorte que

$$\boxed{\text{si} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D \quad \text{qui est diagonale}}$$

6. Prouver que B est semblable à la matrice $T = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Préciser la relation de similitude liant les matrices qui fait intervenir une matrice de passage Q (le calcul de Q^{-1} n'est pas demandé).

On introduit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à B et on cherche une base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = T \text{ aussi } \quad f(u_1) = u_1, \quad f(u_2) = u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = u_1 + u_2 + u_3$$

Les vecteurs u_1 et u_2 sont donc dans l'espace propre $E_1(B) = \mathrm{Ker}\,(B - I_3)$ et ils sont non colinéaires.

$E_1(B) = \mathrm{Ker}\,(B - I_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\Big((1,1,0),(0,0,1)\Big)$

(car $C_1 = -C_2$ et $C_3 = 0$ où C_i colonne i de $B - I_3$: $\mathrm{rg}(B - I_3) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(B - I_3) = 3 - 1 = 2$ et $(B - I3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = (B - I_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$).

On peut donc écrire $u_1 = (\alpha, \alpha, 0)$ et $u_2 = (0, 0, \beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}^*$ et $u_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec

$$f(u_3) = u_1 + u_2 + u_3 \Leftrightarrow f(u_3) - u_3 = u_1 + u_2 \Leftrightarrow (B - I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = \alpha \\ x - y = \alpha \\ x - y = \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow x - y = \alpha = \beta$$

Enfin : $\det(u_1, u_2, u_3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & 0 & x \\ \alpha & 0 & y \\ 0 & \beta & z \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -\beta(\alpha y - \alpha x) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(x - y) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^3 \neq 0$ sachant $x - y = \alpha = \beta$

Finalement : $\left\{\begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta = \alpha \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x - y = \alpha \end{array}\right.$. Pour $\left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta = 1 = x \\ y = z = 0 \end{array}\right.$: $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{vérifie} \quad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T}$

7. a. Rappeler la formule du binôme pour le calcul de $(M_1 + M_2)^n$ lorsque M_1 et M_2 sont des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Formule du binôme dans $M_3(\mathbb{R})$</u> :

Si M_1 et M_2 sont deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$ avec $M_1M_2 = M_2M_1$ alors $\quad (M_1 + M_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_1^k M_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_1^{n-k} M_2^k$

b. En remarquant que N^2 est la matrice nulle, calculer T^n en explicitant les coefficients en fonction de n.

Avec $M = I_n$ et N la matrice de la question précédente qui vérifie $N^2 = O_{3,3}$ et donc : $\quad \forall k \in [\![2, n]\!],\ N^k = O_{3,3}$ De plus : $I_3N = N = NI_3$

alors : $T^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 I_3^n + \binom{n}{1} N^1 \times I_3^{n-1} + O_{3,3} = 1 \times I_3 \times I_3 + n \times N \times I_3 = I_3 + nN = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T^n}$

c. En déduire le calcul de B^n en explicitant les coefficients en fonction de n.

En appelant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à B dans la base canonique $\mathscr{B}_{can} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, alors (avec II-4),

$$T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) \text{ et } Q = P_{\mathscr{B}_{can},(u_1,u_2,u_3)} \text{ est la matrice de passage de } \mathscr{B}_{can} \text{ à } (u_1, u_2, u_3)$$

Dés lors : $B^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f^n)$ et $T^n = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f)$ sont liées par changement de bases $T^n = Q^{-1}B^nQ \Leftrightarrow B^n = QT^nQ^{-1}$

$Q^{-1} = P_{(u_1,u_2,u_3),\mathscr{B}_{can}}$ or : $\left\{\begin{array}{l} u_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ u_2 = \varepsilon_3 \\ u_3 = \varepsilon_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 = u_3 \\ \varepsilon_2 = u_1 - u_3 \\ \varepsilon_3 = u_2 \end{array}\right.$ soit $\quad Q^{-1} = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi : $\quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} n+1 & -n & 0 \\ n & 1-n & 0 \\ n & -n & 1 \end{pmatrix} = B^n}$

8. a. Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.

<u>Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$</u> : $\quad$ Si $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $P_2 \neq 0$ alors : $\exists!(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P_1 = P_2Q + R$ et $\deg(R) < \deg(P_2)$

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X + 1)(X - 2)$ pour n est entier avec $n \geqslant 2$ fixé.

On sait que : $\quad \exists(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$, $X^n = (X + 1)(X - 2)Q + R\ (*)$ $\quad$ et $\quad \deg(R) < 2 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $R = \alpha X + \beta$

En évaluant la relation $(*)$ pour $X = -1$ d'une part et $X = 2$ d'autre part, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} (-1)^n = 0 - \alpha + \beta \\ 2^n = 2\alpha + \beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta = (-1)^n + \alpha \\ 2^n = 3\alpha + (-1)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } X^n \text{ par } (X+1)(X-2) \text{ est donc } R = \frac{2^n - (-1)^n}{3} X + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}}$$

c. Vérifier que $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0$. Déterminer alors A^n.

$(A + I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = O_{3,3}$ $\quad$ (par post-multiplication : le produit a trois colonnes identique égale à la somme des colonnes de $A - I_3$)

En évaluant la relation $\quad X^n = (X + 1)(X - 2)Q + R \quad$ de division euclidienne en $X = A \in M_3(\mathbb{R})$, on obtient :

$A^n = R(A) \Leftrightarrow \boxed{A^n = \alpha A + \beta I_3 \quad \text{où } \alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}}$

Partie II (environ 30 min)

Cette partie est la partie C du sujet math A de banque PT 2007

On définit l'application Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X^2-1)P'' + XP'$

1. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, déterminer $\Phi(X^k)$

$\Phi(X^0) = (X^2-1)\times 0 + X \times 0 = 0 \quad \Phi(X^1) = (X^2-1)\times 0 + X\times 1 = X$ et, pour $k \geqslant 2$:
$\Phi(X^k) = (X^2-1)\times k(k-1)X^{k-2} + X \times kX^{k-1} = \big(k(k-1)+k\big)X^k - k(k-1)X^{k-2} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$
On remarque que les deux cas $k=0$ et $k=1$ peuvent être pris en charge par la relation pour $k \geqslant 2$ donc :

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \quad \Phi(X^k) = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}}$$

2. Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Il s'agit de vérifier que : i) Φ est linéaire ii) $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$
Méthode n° 1 (La plus efficace étant donné la question 1) On commence par vérifier la linéarité :
$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \Phi(\alpha P + Q) = (X^2-1)(\alpha P+Q)'' + X(\alpha P+Q)' = (X^2-1)\big(\alpha P'' + Q''\big) + X\big(\alpha P' + Q'\big)$
(par linéarité de la dérivation)
Aussi, en réordonnant et en factorisant par α : $\Phi(\alpha P+Q) = \alpha\big((X^2-1)P'' + XP'\big) + (X^2-1)Q'' + XQ' = \alpha\Phi(P) + \Phi(Q)$
Pour obtenir ii), on exploite alors la linéarité, la question II-1 et que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel (sev) de $\mathbb{R}[X]$:
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ aussi, par linéarité : $\Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\Phi(X^k)}_{\in \mathbb{R}_n[X]} \in \mathbb{R}_n[X]$ d'après II-1
Mais $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire donc on a bien : $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

3. Déterminer alors $\mathrm{rg}(\Phi)$ et Ker (Φ)

On sait que : $\mathrm{rg}(\Phi) = \dim \mathrm{Im}\,(\Phi)$ et $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathrm{Vect}\big(\Phi(1), \Phi(X), \dots, \Phi(X^n)\big)$ or $\Phi(1)=0$ et la famille $\big(\Phi(X), \dots, \Phi(X^n)\big)$ est libre car constitué de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts aussi la famille $\big(\Phi(X),\dots,\Phi(X^n)\big)$ est libre et génératrice de Im (Φ) de sorte que $\mathrm{rg}(\Phi)$ est le cardinal de cette famille : $\boxed{\mathrm{rg}(\Phi) = n}$
On peut alors appliquer le théorème du rang à l'endomorphisme Φ sachant $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ et $\mathrm{rg}(\Phi) = n$:
$\dim \mathrm{Ker}\,(\Phi) + \mathrm{rg}(\Phi) = \dim \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(\Phi) = (n+1) - n = 1$
Le noyau de Φ est donc un espace de dimension 1 dont on sait que $1 \in$ Ker (Φ) (car $\Phi(1) = 0$) donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\Phi) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]}$

4. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est son ordre ?

D'après la définition du cours et la question II-1, la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 2^2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -k(k-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & k^2 & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n^2 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$$ qui est une matrice carrée d'ordre $n+1$

5. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

On obtient les valeurs propres de Φ comme les racines du polynôme caractéristique :
$\chi_\Phi(x) = \chi_M(x) = \det(xI_{n+1} - M) = x(x-1)(x-2^2)\times \dots (x-n^2)$
puisque ce déterminant est triangulaire supérieur donc il se calcule en réalisant le produit des coefficients de la diagonale.
Ainsi $\boxed{\text{les valeurs propres de } \Phi \text{ sont les réels de } \mathrm{Sp}(\Phi) = \left\{k^2 \mid k \in [\![0,n]\!]\right\}}$
Le polynôme caractéristique de Φ est scindé à racines simples donc $\boxed{\Phi \text{ est diagonalisable}}$

6. Calculer la trace de Φ.

On sait que $\boxed{\mathrm{tr}(\Phi) = \mathrm{tr}(M) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Rappel : vous devez tous connaître $S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ Pour calculer $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$, on part de :
$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ qu'on somme : $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3S_2 + S_1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = 3S_2 + S_1$
La première somme est télescopique : $(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + S_1 \Rightarrow S_2 = \dfrac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - \dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{1}{6}\Big(2(n^3+3n^2+3n+1) - 1 - n^2 - n\Big) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Remarques suite à la correction des copies

Vos performance sur le problème d'analyse sont très, très décevantes…
Attention, l'épreuve de Maths C (l'analyse justement) compte pour toutes les écoles !
Il va falloir retravailler ce problème avec beaucoup, beaucoup de sérieux pendant les révisions.

Analyse : Partie I

Une partie particulièrement peu réussie par l'ensemble des élèves.
Le choix des fonctions dans l'IPP de la question 2 n'était pas simple (seul 1 étudiant l'a réussie) mais c'est une question classique de concours où il faut penser à écrire $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{x}{2} \times \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ pour faire apparaître une primitive sur le second terme du produit. Je vous encourage à bien formuler le résultat d'IPP de façon à obtenir les points de cours :
- ne pas oublier l'hypothèse C^1 pour u et v
- l'IPP n'est possible que si vous avez prouvez la convergence de 2 termes sur les 3 sinon faire l'IPP « sous réserve d'existence »
Au passage, j'ai vu beaucoup d'HORREURS dans des calculs farfelus de primitives ou de dérivées….
Je suis assez déçue sur vos performance dans la question 1 car de nombreuses erreurs ont été commises alors que j'avais précisément souligné qu'il ne fallait pas les faire ! Je rappelle donc que :

- une étude de convergence d'intégrale commence par un argument de continuité et il s'agit d'étudier la continuité de la fonction f (pas de $f(x)$ ni de l'intégrale qui n'ont pas de sens !).
- on doit étudier séparément les singularités repérées. Ici, chacune des intégrales ne présentait qu'une seule singularité en $+\infty$. Aussi, étudier la fonction au voisinage de 0 est inutile et laisse croire que la méthodologie n'est pas comprise…
- En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ est nécessaire mais pas suffisant : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ DV et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- lorsqu'on utilise le critère d'équivalence pour $f(x) \sim_a g(x)$ il faut un argument "signe constant" donc
  - soit on précise que l'une des fonctions f ou g est positive au voisinage de a (Attention ! un nombre complexe n'a pas de signe !)
  - soit on parle d'intégrabilité de g au voisinage de a (ou de convergence absolue de l'intégrale de g au voisinage de a)
  - soit on parle de convergence absolue d'intégrale (mais attention à ne pas ajouter de singularité : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ CVA mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ DV
- les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ sont toujours divergente ! On sait, par contre que :
  - $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}\right]$ est intégrable en $+\infty$ si $\alpha > 1$ (et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ CV (absolument) par exemple)
  - $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}\right]$ est intégrable en 0 si $\alpha < 1$ (et donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ CV (absolument) par exemple)
- Lorsque la fonction f est à valeurs complexes (cas de I), on étudie l'intégrabilité/la CVA en cherchant un équivalent de $|f(x)|$ (module de $f(x)$!)

  Certains ont justifié la convergence en revenant aux parties réelles et imaginaires : l'argument est correcte mais plus long !

  Par contre, savoir que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left(\int_0^{+\infty} \Re e(f)(x)\mathrm{d}x\right) + i\left(\int_0^{+\infty} \Im m(f)(x)\mathrm{d}x\right)$ était un attendu de la question 3
- On ne peut écrire des égalités du type $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^{+\infty}$ que si on sait que l'intégrale est convergente…

  On peut obtenir la convergence de K par un critère d'équivalence : $\dfrac{1}{1+x^2} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ or $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\right]$ est intégrable en $+\infty$

  OU BIEN on l'obtient en revenant à la définition car on reconnaît une primitive usuelle :
$$\int_0^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^{\mathrm{A}} = \operatorname{Arctan} \mathrm{A} \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \text{ donc K converge et } \mathrm{K} = \frac{\pi}{2}$$

Analyse : Partie II

Là encore, vos prestations sont extrêmement décevantes et bien souvent vous ne récupérez pratiquement aucun point sur cette partie.

1. La fonction $[x \mapsto (1+x)^n - 1]$ lorsque n est un entier naturel est une fonction polynômiale aussi : $f(x) = \big((1+x)^n - 1\big)e^{-x} \sim_{+\infty} x^n \times e^{-x}$ un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré

   Il restait alors à utiliser une règle du o en conservant suffisamment d'exponentielle (vu plusieurs fois en TD) : la limite pour obtenir le o s'obtenant à l'aide du résultat de croissance comparée…
2. C'était bien sûr une intégration par parties ! Il y avait une subtilité finale pour conclure avec un argument de linéarité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1+x)^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \big((1+x)^{n-1} - 1 + 1\big)e^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{I}_{n-1} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ possible car toutes les intégrales convergent

3. C'était une question difficile (il en faut...). Vous avez encore peu d'expérience sur les arguments par itérations (même si on en a fait quelques uns) mais nous en referons sur le chapitre « Série entière ». Par contre, l'argument par récurrence était à votre portée !

4. Des questions directes de cours qui ont été des catastrophes...C'est plus qu'inquiétant : vos connaissances sont évanescentes. Vous n'inscrivez pas vos savoirs dans votre mémoire à long terme mais dans votre mémoire à court terme si bien que vous êtes incapable de mobiliser des bases de cours vu il y a quelques semaines... Cette question doit absolument être réussie : c'est de la restitution bête et stupide de cours et elle permet de préparer la question suivante !

5. Le début de la résolution n'est pas si difficile si on connaît le cours car tout a été préparé dans 4. Un changement d'indices permet de finaliser le résultat...

Analyse : Partie III

1. La définition de « f est intégrable sur $]0,1]$ » n'est pas parfois pas connue :

il s'agit de vérifier que f est continue sur $]0,1]$ mais aussi que $\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$ converge !

Beaucoup d'élèves se contentent de donner un argument de continuité pour f et n'étudie pas la singularité en 0...

Concernant le changement de variables, ceux qui n'ont pas réussi sont ceux qui se trompent dans le calcul de l'élément différentiel : je rappelle que si $x = \varphi(t)$ alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ *Les physiciens écrirait* $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$...

2. a. Là encore, l'intégrabilité est bien souvent "escamotée"...

Un argument de continuité peut suffire pour $n \geqslant 1$ (encore qu'il s'agit en fait d'un prolongement par continuité en 0) mais pas pour $n = 0$. Je rappelle que $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ lorsque α n'est pas un entier !

Le calcul de l'intégrale n'a (heureusement) pas posé de problème en général mais n'oubliez pas de préciser que $n + \frac{1}{2} > 0$ pour assurer que $x^{n+\frac{1}{2}}$ s'annule en $x = 0$.

b. Très peu de réussite sur cette question...ce qui est très décevant ! Il s'git essentiellement de repérer une somme géométrique de raison $q = -x$ en écrivant $(-1)^n x^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times (-x)^n$

c. Il est inadmissible de ne pas pouvoir restituer correctement les hypothèses d'un théorème du cours !

En général, vous vouliez absolument vérifier toutes les hypothèses alors qu'ici, l'une des hypothèse est fausse...

Veillez au formulation de questions : si toutes les hypothèses avaient été vérifiées, la question aurait été « montrer, en utilisant le théorème d'intégration terme à terme, que... ». La formulation en « Les hypothèses sont-elles vérifiées ? » suggère plutôt une réponse négative. Lorsque vous affirmez que des hypothèses sont vérifiées, précisez le numéro de la question où cela a été fait même si vous n'y êtes pas, vous même, parvenu. Par convention, vous pouvez utilisé comme acquis tous les résultats des questions précédentes...

d. On ne pouvait pas obtenir la convergence de cette série par le théorème d'intégration terme à terme puisqu'ici il ne s'appliquait pas...Pourtant, la série est convergence...en utilisant le théorème des séries alternées.

3. a. C'était la seule question un peu délicate de cette partie : l'objectif est, in fine, que la conclusion du théorème d'intégration terme à terme reste vraie dans ce cas même si le théorème ne s'y applique pas. Pour cela, on utilise une majoration du reste. Les techniques utilisées dans la question restent très classiques et proche de méthode déjà vu en classe...

b. La question finale réalisée le bilan en passant à la limite lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$ sur le reste $\mathrm{R_N}$. Elle utilise que :

- la somme de la série (dont la convergence avait déjà été prouvée en 4a) est la limite des sommes partielles $\mathrm{S_N}$
- $\mathrm{R_N} = \mathrm{I} - \mathrm{S_N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow \mathrm{S_N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I}$.

Aussi, par unicité de la limite : $\mathrm{S} = \mathrm{I} = \frac{\pi}{2}$