DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Calculatrice non autorisée - Durée : 4h

Le barème sera proportionné au temps indiqué pour traiter chacune des parties des problèmes

PROBLÈME D'ANALYSE

Les trois parties de ce problème sont totalement indépendantes mais traitent toutes d'intégrales généralisées

Partie I (environ 30 min)

On considère les intégrales suivantes : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-i)^2}$, $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ et $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

1. Justifier la convergence de chacune des intégrales et rappeler la valeur de K

2. En déduire l'existence de l'intégrale $\mathrm{K}-\mathrm{J}$ qu'on exprimera sous la forme d'une intégrale
Calculer J en réalisant une intégration par parties dans l'intégrale $\mathrm{K}-\mathrm{J}$

3. Calculer enfin la valeur de I

Partie II (environ 45 min)

On considère la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big((1+x)^n - 1\Big) e^{-x} \mathrm{d}x$

1. Justifier la convergence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Démontrer que $\mathrm{I}_n = n + n\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

3. Exprimer alors I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. *Aide : On pourra vérifier que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{I}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}$

4. Pour quelles valeurs réelles de x les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}$ convergent-elles ? Donner alors leurs sommes.
Définir le produit de Cauchy de ces deux séries. Pour quelles valeurs de x est-il convergent ?

5. Démontrer enfin que : $\forall x \in]-1,1[,\quad \dfrac{xe^x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$

Partie III (environ 60 min)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$

1. Justifier que f est intégrable sur $]0,1]$ puis déterminer la valeur de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ en posant $x = t^2$.

2. Pour tout entier n, on note f_n la fonction définie sur $]0,1]$ par : $f_n(x) = (-1)^n x^{n-\frac{1}{2}}$.

- **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que f_n est intégrable sur $]0,1]$ et établir que $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$
- **b.** Justifier que, pour $x \in]0,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
- **c.** Rappeler les hypothèses à vérifier pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme à f.Sont-elles vérifiées ici ?
- **d.** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

3. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R_N} = \mathrm{I} - \displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}$ où $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ a été définie en question 1.

- **a.** Établir que $\mathrm{R_N} = \displaystyle\int_0^1 (-1)^{\mathrm{N}+1} \frac{x^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}}{1+x} \mathrm{d}x$ puis que $|\mathrm{R_N}| \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{N}+1}$
- **b.** En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}$

Problème d'algèbre linéaire

Pour tous entier strictement positifs n, p, $M_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Les deux parties de ce problème sont totalement indépendantes

Partie I (environ 1h15)

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$

2. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

3. Déterminer les valeurs propres et les sev propres de A

4. La matrice A est-elle semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

5. Proposer une matrice D diagonale semblable à A. On précisera la relation de similitude liant les matrices A et D qui fait intervenir une matrice de passage P à expliciter (le calcul de P^{-1} n'est pas demandée)

6. Prouver que B est semblable à la matrice $T = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Préciser la relation de similitude liant les matrices qui fait intervenir une matrice de passage Q (le calcul de Q^{-1} n'est pas demandé).

7. a. Rappeler la formule du binôme pour le calcul de $(M_1 + M_2)^n$ lorsque M_1 et M_2 sont des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

b. En remarquant que N^2 est la matrice nulle, calculer T^n en explicitant les coefficients en fonction de n.

c. En déduire le calcul de B^n en explicitant les coefficients en fonction de n.

8. a. Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+1)(X-2)$ pour n est entier avec $n \geqslant 2$ fixé.

c. Vérifier que $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0$. Déterminer alors A^n.

Partie II (environ 30 min)

On définit l'application Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$

1. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, déterminer $\Phi(X^k)$

2. Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

3. Déterminer alors $\mathrm{rg}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$

4. Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Quel est son ordre ?

5. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

6. Calculer la trace de Φ.