PT 2024-2025 : Correction du DS nº 4

Deuxième exercice du sujet B de Banque PT 2024

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère les fonctions

- r_0 définie sur $I_0 = [0, 2\pi]$ par $\forall t \in I_0, r_0(t) = R$ où $R > 0$
- r_1 définie sur $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\forall t \in I_1, r_1(t) = \cos t$
- r_2 définie sur $I_2 = \mathbb{R}$ par $\forall t \in I_2, r_2(t) = e^t$
- r_3 définie sur $I_3 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\forall t \in I_3, r_3(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$

Enfin r_4 désigne une fonction de classe C^1 sur $I_4 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Pour tout $n \in [\![0;4]\!]$, on note

- Λ_n la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = r_n(t)\cos(t) \\ y(t) = r_n(t)\sin(t) \end{cases}$, $t \in I_n$;
- $M_n(t)$ le point de Λ_n de paramètre t pour $t \in I_n$.

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

1. Quelle est la nature de Λ_0 ? Préciser ses éléments caractéristiques.

$\Lambda_0 : \begin{cases} x_0(t) = R\cos(t) \\ y_0(t) = R\sin(t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ où on reconnaît la représentation paramétrique du cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon R

2. Démontrer que Λ_1 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

On a : $\Lambda_1 : \begin{cases} x_1(t) = \cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2t) \\ y_1(t) = \cos(t)\sin(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2} \end{cases}$, $t \in I_1 \Leftrightarrow_{s=2t} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(s) \\ y = 0 + \dfrac{1}{2}\sin(s) \end{cases}$, $s \in [-\pi, \pi]$

Veillez à bien modifier le domaine décrit par le paramètre !

Là encore, on identifie le paramétrage d'un cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Partie B

1. Calculer la longueur de la courbe Λ_2 entre les points $M_2(-\ln 3)$ et $M_2(3\ln 2)$

x_2 et y_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec : $x_2'(t) = e^t\cos(t) - e^t\sin(t)$ et $y_2'(t) = e^t\sin(t) + e^t\cos(t)$

D'après le cours, la longueur cherchée est $\ell = \displaystyle\int_{-\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t$

Or : $x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 = e^{2t}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t) = e^{2t} \times 2$ car $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Ainsi : $\ell = \displaystyle\int_{-\ln 3}^{3\ln 2} e^t\sqrt{2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left[e^t\right]_{\ln\frac{1}{3}}^{\ln(2^3)} = \sqrt{2}\left(e^{\ln 8} - e^{\ln\frac{1}{3}}\right) = \sqrt{2}\left(8 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{2} \times \frac{23}{3}$ u.l

2. La courbe Λ_2 est-elle de longueur finie ?

Notons $\ell(t)$ la longueur de la courbe entre les points $M_2(0)$ et $M_2(t)$ alors : $\ell(t) = \left|\displaystyle\int_0^t e^s\sqrt{2}\mathrm{d}s\right| = \sqrt{2}|e^t - 1|$

Lorsque $t \to +\infty$, $\ell(t) = \sqrt{2}(e^t - 1) = \sqrt{2}e^t + o(e^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

Si la courbe était de longueur finie L alors $L \geqslant \ell(t)$ et il y a une contradiction puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \ell(t) = +\infty$

3. Démontrer que tous les points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale sont alignés. On précisera un point et un vecteur directeur de la droite qui les contient.

Lorsque la tangente en $M_2(t)$ à Λ_2 est verticale, alors $x_2'(t) = 0$ (que le point soit régulier ou non)

$x_2'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t(\cos t - \sin t) = 0 \Leftrightarrow_{e^t \neq 0} \cos t = \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{2} - t\ [2\pi]$ ou $t \equiv t - \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow t \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$ ou $\underbrace{0 \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]}_{\text{Pas de solutions}} \Leftrightarrow t \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

Posons $t_k = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ pour nommer les différents paramètres concernés.Alors :

$$x_2(t_k) = e^{t_k}\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k e^{t_k}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad y(t_k) = e^{t_k}\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k e^{t_k}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On constate que $x(t_k) = y(t_k)$ autrement dit les points $M(t_k)$ sont tous sur la droite d'équation $y = x$ qui passe par l'origine O et qui est dirigée par le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath} = (1, 1)$

4. Soit $M_2(t)$ un point de Λ_2. Donner le repère de Frenet puis la courbure de Λ_2 au point $M_2(t)$

Soit $s'(t) = \left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} \right\| = \sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)} = \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2}e^t$ d'après B-2

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M_2(t)$ est régulier puisque $s'(t) \neq 0$ et donc on peut définir la base de Frenet.

Le premier vecteur de la base de Frenet est $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{s'(t)} \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} = \overrightarrow{T}}$

Le second vecteur de la base de Frenet est directement orthogonal à $\overrightarrow{T}$ d'où : $\boxed{\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}}$

Le repère de Frenet est alors $\boxed{\left(M_2(t); \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)}$

Méthode 1 On peut calculer la courbure à l'aide des formules de Frenet : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma \overrightarrow{N} \Leftrightarrow \dfrac{1}{s'(t)} \dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \gamma \overrightarrow{N}$

En comparant les abscisses, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos t - \sin t\right) = \gamma \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos t - \sin t\right) \Leftrightarrow \boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-t}}$

Méthode 2 On utilise le théorème de relèvement : si $\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}$ alors $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin t = \cos \dfrac{\pi}{4} \cos t - \sin \dfrac{\pi}{4} \sin t = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)$ et : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos t = \cos \dfrac{\pi}{4} \sin t + \sin \dfrac{\pi}{4} \cos t = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + t\right)$

donc $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{4} + t$ convient et, par suite : $\gamma = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{1}{s'(t)} \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \times 1$

5. Déterminer une représentation paramétrique de la développée C_2 de λ_2

Par définition, la développée est la courbe décrite par les centres de courbures de Λ_2

Le centre de courbure $C_2(t)$ de Λ_2 associé à $M_2(t)$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{OC_2(t)} = \overrightarrow{OM_2(t)} + \dfrac{1}{\gamma} \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + \sqrt{2} e^t \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}$

La développée est donc la courbe paramétrée $\boxed{C_2 : \begin{cases} x = -e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$

6. Démontrer que C_2 est l'image de Λ_2 par une rotation donc on précisera le centre et l'angle.

On pourra s'intéresser aux affixes complexes des différents points considérés.

L'affixe de $M_2(t)$ est le complexe $z_2(t) = x_2(t) + i y_2(t) = e^t e^{it} = e^t\left(\cos t + i \sin t\right)$

L'affixe de $C_2(t)$, le centre de courbure de Λ_2 associé à $M_2(t)$ a pour affixe :

$$-e^t \sin t + i e^t \cos t = i e^t \left(\cos t + i \sin t\right) = i z_2(t) = e^{i\frac{\pi}{2}} z_2(t)$$

On peut alors conclure que $C_2(t)$ est l'image de $M_2(t)$ par la rotation plane de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Ainsi, $\boxed{C_2 \text{ est l'image de } \Lambda_2 \text{ par la rotation plane de centre O et d'angle } \dfrac{\pi}{2}}$

Partie C

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ_3 à $I_3' = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Préciser comment obtenir la courbe Λ_3 en entier.

Pour $t \in I_3$, $r_3(t)$ existe et on a : $x_3(t) = \sin^2 t$ et $y_3(t) = \dfrac{\sin^3(t)}{\cos(t)}$ Exploitons la parité puisque I_3 est centré en 0 :

$x_3(-t) = x_3(t)$ (à cause du carré) et $y_3(t) = -y_3(t)$ (cosinus pair, sinus impair et présence du cube)

ainsi $M_3(-t)$ est l'image de $M_3(t)$ par la symétrie d'axe $O + \mathrm{Vect}(\vec{\imath})$

Il suffit donc d'étudier Λ_3 sur $I_3' = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ puis de réaliser une symétrie d'axe $O + \mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ pour obtenir la totalité du tracé de Λ_3 sur I_3

2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x_3 et y_3 sur I_3'. Préciser les valeurs et/ou les limites au bord.

Par les théorèmes usuels (produit et quotient), x_3 et y_3 sont C^1 sur I_3' avec :

$x_3'(t) = 2\sin(t)\cos(t)$ or $\cos t > 0$ sur I_3' donc $x_3'(t)$ a le signe et les zéros de $\sin t$ soit : $x_3'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ et $x_3'(t) \geqslant 0$

$y_3'(t) = \dfrac{3\cos^2(t)\sin^2(t) - (-\sin t)\sin^3(t)}{\cos^2(t)} = \dfrac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} \left(3\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) = \dfrac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} (1 + 2\cos^2 t)$

or, sur I_3', $\cos^2(t) > 0$ et $1 + 2\cos^2(t) > 0$ donc $y_3'(t)$ a le signe et les zéros de $\sin^2(t)$ d'où : $y_3'(t) \geqslant 0$ et $y_3'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

En $t=0$, on évalue : $x_3(0)=0=y_3(0)$
En $t=\dfrac{\pi}{2}$, on passe à la limite sachant que
$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\sin t=1$ et $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\cos t=0^+$
on obtient, par les limites usuels (produit,quotient) :
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}x_3(t)=1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y_3(t)=+\infty$

t	0		$\pi/2$
$x_3'(t)$	0	$+$	
x_3	0	$\nearrow$	1
$y_3'(t)$	0	$+$	$\Vert$
y_3	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

3. Quelle est la nature du point $M_3(0)$? Préciser la tangente en ce point.

Le point $M_3(0)$ est stationnaire (car $x_3'(0)=0=y_3'(0)$) aussi, pour étudier sa nature, on utilise un développement limité vectoriel : $x_3(t)=\sin^2 t\sim_0 t^2$ aussi $x_3(t)=t^2+o(t^2)$ et, par parité de x_3, on a aussi : $x_3(t)=t^2+o(t^3)$
$y_3(t)=\dfrac{\sin^3 t}{\cos t}\sim_0\dfrac{t^3}{1}\sim_0 t^3$ aussi $y_3(t)=t^3+o(t^3)$ alors : $\begin{pmatrix}x_3(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}o(t^3)\\o(t^3)\end{pmatrix}$
La première dérivée non nulle est pour $p=2$ et $\boxed{\text{la tangente en } M_3(0) \text{ est dirigée par } \vec{\imath} \text{ donc elle est horizontale.}}$
La dérivée suivante non colinéaire est pour $q=3$ aussi le point $\boxed{M_3(0) \text{ est un point de rebroussement de première espèce}}$

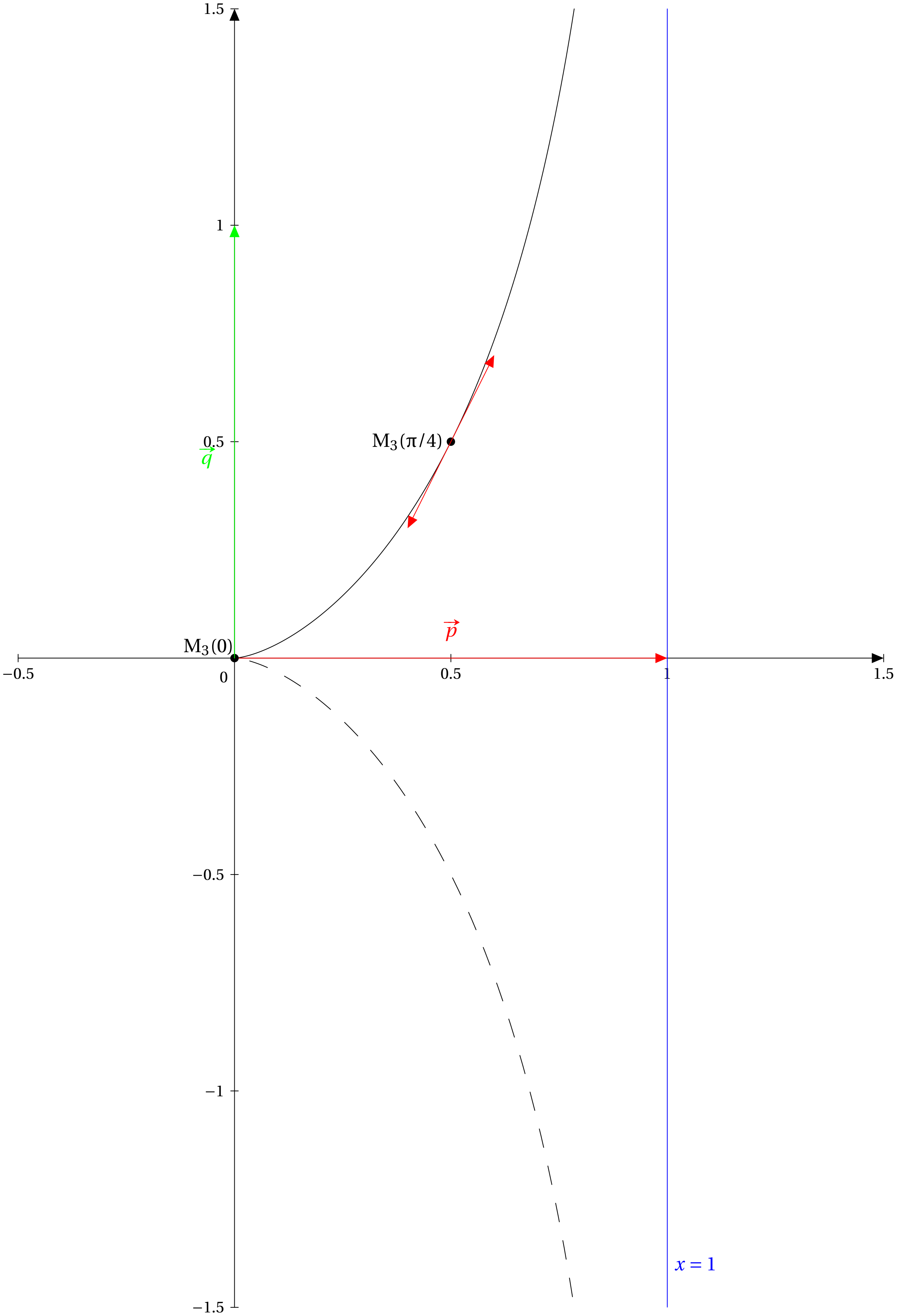
4. Donner les coordonnées du point $M_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que celle d'un vecteur directeur de la tangente à Λ_3 en ce point.

$\boxed{\text{Le point } M_3\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \text{ est régulier de coordonnées } \left(x_3\left(\tfrac{\pi}{4}\right),y_3\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)}$ car $\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
La tangente en $M_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}x_3'(\pi/4)\\y_3'(\pi/4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ vu que : $x_3'(\pi/4)=2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1$ et $y_3'(\pi/4)=1\times(1+2\times\frac{1}{2})=2$

5. Etudier la branche infinie lorsque t tend vers $\dfrac{\pi}{2}$

D'après les limites déterminées en Q2, on peut affirmer que cette branche infinie est une asymptote vecticale d'équation $x=1$ (la courbe étant situé en haut à gauche à proximité de l'asymptote)

6. Tracer la courbe Λ_3 sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet. On y fera apparaître les éléments déterminées dans les questions précédentes. Unité : 8 cm



1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0.5
1
1.5
$\overrightarrow{q}$
$\overrightarrow{p}$
$M_3(\pi/4)$
$M_3(0)$
$x = 1$

Partie D

On considère les deux fonctions h et k définies sur I_4 par : $\forall t \in \mathrm{I}_4$

$$h(t) = t^2\big(1+\tan^2(t)\big) \qquad \text{et} \qquad k(t) = \tan(t) + t\big(1+\tan^2(t)\big)$$

Ainsi que la famille de droites $(\mathrm{D}_t)_{t\in \mathrm{I}_4}$ d'équation cartésienne : $\quad k(t)x - y = h(t)$

1. Démontrer que $\forall t \in \mathrm{I}_4,\quad h'(t) = 2t\big(1+\tan^2(t)\big)\big(1+t\tan(t)\big)$ et $k'(t) = 2\big(1+\tan^2(t)\big)\big(1+t\tan(t)\big)$

La fonction tangente est de classe C^1 sur I_4 donc , par produit et somme de fonctions usuelles, les fonctions h et k sont de classe C^1 sur I_4 et on a :

$h'(t) = 2t\big(1+\tan^2(t)\big) + t^2 \times 2\tan t \times \big(1+\tan^2(t)\big) = \big(2t+2t^2\tan^2 t\big)\big(1+\tan^2(t)\big) = 2t\big(1+\tan^2(t)\big)\big(1+t\tan(t)\big)$

$k'(t) = \big(1+\tan^2(t)\big) + \big(1+\tan^2(t)\big) + t\times 2\tan t \times \big(1+\tan^2(t)\big) = \big(1+1+2t\tan t\big)\big(1+\tan^2(t)\big) = 2\big(1+t\tan t\big)\big(1+\tan^2(t)\big)$

2. Soit $t \in \mathrm{I}_4$. Déterminer l'intersection de la droite D_t avec l'axe des ordonnées ainsi qu'un vecteur directeur de la droite D_t puis en déduire une représentation paramétrique de la droite D_t

$\mathrm{M}(x,y) \in \mathrm{D}_t \cap (\mathrm{O}y) \Leftrightarrow k(t)x - y = h(t)$ et $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -h(t) \end{cases}$

$\boxed{\text{Le point d'intersection de la droite } \mathrm{D}_t \text{ avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées } \mathrm{A}(t) = (0, -h(t))}$

$\boxed{\text{La droite } \mathrm{D}_t \text{ qui a pour équation} \quad k(t)x - y = h(t) \quad \text{admet pour vecteur directeur } \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ k(t) \end{pmatrix}}$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{D}_t = \mathrm{A}(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t)) \quad \text{a pour représentation paramétrique } \mathrm{D}_t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -h(t) + \lambda k(t) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$

3. Déterminer une représentation paramétrique de l'enveloppe C_4 de la famille de droites $(\mathrm{D}_t)_{t\in \mathrm{I}_4}$

On cherche un paramétrage régulier $[t \mapsto \mathrm{P}(t)]$ de l'enveloppe C_4 de la famille de droites $(\mathrm{D}_t)_{t\in\mathrm{I}_4}$ tel que

D_t est la tangente à C_4 en $\mathrm{P}(t)$ autrement dit

1) $\mathrm{P}(t) \in \mathrm{D}_t$ et donc $\quad \exists \lambda(t) \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \lambda(t)\vec{u}(t)$

2) Les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\mathrm{d}t}$ et $\vec{u}(t)$ sont colinéaires car ils dirigent tous les deux D_t donc $\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right) = 0$

$$\det\left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\mathrm{d}t} + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right) + 0 + \lambda(t)\det\big(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)\big) = 0$$

Or : $\quad \det\left(\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -h'(t) & k(t) \end{vmatrix} = h'(t) \quad$ et : $\quad \det\big(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)\big) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k'(t) & k(t) \end{vmatrix} = -k'(t)$

Or : $\quad k'(t) = \underbrace{2\big(1+\tan^2(t)\big)}_{>0}\big(1+t\tan(t)\big)\quad$ a le signe de $1+t\tan(t)$ sur I_4 mais, sur I_4, $\tan(t)$ a le signe de t donc $t\tan(t) \geqslant 0$ et par suite $1+t\tan(t) > 0$. Ainsi, on peut donc affirmer que $k'(t) > 0$ et donc $k'(t)$ ne s'annule pas.

On peut ainsi calculer : $\quad \lambda(t) = -\dfrac{\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right)}{\det\big(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)\big)} = -\dfrac{h'(t)}{-k'(t)} = \dfrac{2t\big(1+\tan^2(t)\big)\big(1+t\tan(t)\big)}{2\big(1+\tan^2(t)\big)\big(1+t\tan(t)\big)} = t$

Finalement : $\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h(t) \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -h(t) + tk(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t\tan(t) \end{pmatrix} \quad$ vu que $\begin{cases} h(t) = t^2(1+\tan^2(t)) \\ k(t) = \tan(t) + t(1+\tan^2(t)) \end{cases}$

$\boxed{\text{Une représentation paramétrique de } \mathrm{C}_4 \text{ est} \quad \mathrm{C}_4 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t\tan(t) \end{cases}, t \in \mathrm{I}_4}$

4. Existe-t-il une fonction r_4 telle que $\mathrm{C}_4 = \Lambda_4$?

<u>Analyse</u> : Si r_4 existe, alors on a : $\quad \forall t \in \mathrm{I}_4, \begin{cases} t = x_4(t) = r_4(t)\cos(t) \\ t\tan(t) = y_4(t) = r_4(t)\sin(t) \end{cases} \underset{\cos(t)\neq 0 \text{ pour } t\in\mathrm{I}_4}{\Rightarrow} r_4(t) = \dfrac{t}{\cos(t)}$ avec la première équation.

<u>Synthèse</u> : On pose $r_4(t) = \dfrac{t}{\cos(t)}$ pour $t \in \mathrm{I}_4$ alors , par quotient avec $\cos(t) \neq 0$ pour $t \in \mathrm{I}_4$, r_4 est bien C^1 sur I_4 et on a :

$\forall t \in \mathrm{I}_4, \quad x_4(t) = t \quad$ et $\quad y_4(t) = \dfrac{t}{\cos(t)} \times \sin(t) = t\tan(t) \quad$ de sorte que $\Lambda_4 = \mathrm{C}_4$

$\boxed{\text{Il existe bien une fonction } r_4 \text{ telle que } \mathrm{C}_4 = \Lambda_4 \text{ d'expression } r_4(t) = \dfrac{t}{\cos(t)} \text{ pour } t \in \mathrm{I}_4}$

Troisième exercice - Partie A du sujet B de Banque PT 2024

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$(\mathscr{E}_1) : \ M^2 - 2M = A \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre les trois équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_1) : \ x^2 - 2x = 0 \qquad (E_2) : \ x^2 - 2x = -1 \qquad (E_3) : \ x^2 - 2x = 3$$

- $(E_1) : \ x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ a pour solution $\boxed{\mathscr{S}_1 = \{0, 2\}}$
- $(E_2) : \ x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ a pour solution $\boxed{\mathscr{S}_2 = \{1\}}$
- $(E_3) : \ x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$ a pour solution $\boxed{\mathscr{S}_3 = \{-1, 3\}}$

2. a. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3 \\ -3 & x+3 & -3 \\ -4 & 4 & x-3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} (x-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & x+3 & -3 \\ 1 & 4 & x-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (x-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix}$$

On développe alors selon C_1 : $\chi_A(x) = (x-3) \times + \begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 2 & x \end{vmatrix} = (x-3) \times (x+1)x$ ainsi $\boxed{\chi_A(x) = x(x+1)(x-3)}$

$\boxed{\text{La matrice A a pour spectre } \mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 3\}}$ Contrôle sécurité : $-1 + 0 + 3 = 2 = \mathrm{tr}(A)$

b. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples ce qui est une condition suffisante pour affirmer que $\boxed{\text{A est diagonalisable}}$

c. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$

On classera les coefficients de la diagonale de D par ordre croissant.

Puisque A est diagonalisable, on a : $E_{-1}(A) \oplus E_0(A) \oplus E_3(A) = \mathbb{R}^3$ où $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda I_3)$ est le sous-espace propre (sev propre) de A associé à la valeur propre λ. On obtient une base de diagonalisation en concaténant les bases de ces sev propres. Or, ces sev sont tous de dimension 1 (car valeur propre simple) donc il suffit de trouver un vecteur propre non nul de chacun des sev pour obtenir cette base.

On notera C_i la colonne i de la matrice avec laquelle on travaille.

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Ker}\ (A + I_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors : } C_1 - C_3 = 0 \Leftrightarrow (A + I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aussi } \left\{ \begin{array}{l} E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1) \\ \text{où } \varepsilon_1 = (1, 0, -1) \end{array} \right. .$$

$$E_0(A) = \mathrm{Ker}\ A \text{ alors : } C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aussi } E_0(A) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2) \text{ où } \varepsilon_2 = (1, 1, 0).$$

$$E_3(A) = \mathrm{Ker}\ (A - 3I_3) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors : } C_1 + C_2 + C_3 = 0 \Leftrightarrow (A - 3I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aussi } \left\{ \begin{array}{l} E_3(A) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3) \\ \text{où } \varepsilon_3 = (1, 1, 1) \end{array} \right. .$$

Finalement : $\mathscr{B}_{diag} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de diagonalisation,

$$\boxed{P = P_{\mathscr{B}_{can}, \mathscr{B}_{diag}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}}$$

3. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 2.

a. Démontrer que $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$

On a $A = PDP^{-1}$ et $M = P\Delta P^{-1}$ aussi $M^2 = P\Delta P^{-1} \times P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1}$ puis :
$M^2 - 2M = A \Leftrightarrow P\Delta^2P^{-1} - 2P\Delta P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow P\left(\Delta^2 - 2\Delta\right)P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$
en pré-multipliant par P^{-1} et post-multipliant par P dans chacun des membre de l'égalité.

On suppose désormais que M est solution de $(\mathscr{E}_1)$.

b. Démontrer que $MA = AM$

On sait que $M^2 - 2M = A$ aussi $MA = M\left(M^2 - 2M\right) = M^3 - 2M^2 = \left(M^2 - 2M\right)M = AM$ soit $\boxed{MA = AM}$

c. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
Démontrer que le vecteur $Y = MX$ appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et en déduire que X est un vecteur propre de M.

On sait que $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ (vecteur colonne) avec $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$ aussi le produit matriciel $Y = MX \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ puisque $M \in M_3(\mathbb{R})$ et $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.
De plus : $AY = AMX \underset{\text{avec 3(b)}}{=} MAX \underset{\text{or } AX=\lambda X}{=} M(\lambda X) = \lambda(MX) = \lambda Y$ donc $\boxed{Y \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_3) = E_\lambda(A)}$

D'après la question 2, les valeurs propres de A sont toutes simples donc les espaces propres de A sont tous de dimension 1 aussi, si X est vecteur propre de A associé à λ, alors $E_\lambda(A) = \operatorname{Vect}(X)$.
Dés lors : $Y = MX \in E_\lambda(X) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, Y = MX = \alpha X$ avec $X \neq 0$ ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\text{X est un vecteur propre de M}}$$

d. En déduire que la matrice Δ est diagonale.

Les colonnes de la matrice P forment une base de vecteurs propres de A. D'après la question précédente, c'est donc aussi une base de vecteurs propres de M autrement dit une base de diagonalisation de M. Par changement de bases, on a donc : $\boxed{\Delta = P^{-1}MP \text{ qui est diagonale.}}$

4. a. Déterminer toutes les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$

On cherche Δ sous la forme $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ alors $\Delta^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ or $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$\Delta^2 - 2\Delta = D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 2a = -1 \\ b^2 - 2b = 0 \\ c^2 - 2c = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in \{0,2\} \\ b = 1 \\ c \in \{-1,3\} \end{array} \right.$ avec la question 1 d'où les quatres matrices possibles :

$$\Delta \in \left\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\right\} \text{ où } \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Delta_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b. En déduire toutes les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$. On exprimera M à l'aide de P et de matrices diagonales à préciser.

Avec la question 3(a) :
$M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$ où $\Delta = P^{-1}MP \Leftrightarrow \Delta = P^{-1}MP \in \left\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\right\}$

$$\Leftrightarrow \boxed{M \in \left\{P\Delta_1P^{-1}, P\Delta_2P^{-1}, P\Delta_3P^{-1}, P\Delta_4P^{-1}\right\}}$$

Pour ce devoir, j'ai adopté une notation concours : le barème est sur 120 points mais il y a 10 points pour l'allure, le soin, la rigueur, l'orthographe (c'est environ 10% de la note aux concours). Vous partez donc tous avec un capital de 10 points auxquels je retranche des points lorsqu'il y a des problèmes (en vert sur vos copies)
Vous pouvez facilement calculer votre note sur 20 (Total sur 120 à diviser par 6) mais les moyennes des épreuves sont généralement entre 9 et 9.5 aussi j'ai finalement noté sur 22 (division par 5,45 au lieu de 6 et arrodi) pour obtenir vos notes afin d'avoir une moyenne d'épreuve à 9,25.
Pour information : la moyenne nationale de l'an dernier sur cette épreuve de Maths B est de 9,41 et la promo de l'an dernier a performé sur cette épreuve avec une moyenne de 11,53.
Dans la classe, 2 copies font de bonnes performances (13.9 et 13.2) et creusent un écart avec un groupe de 7 copies très correctes (entre 9.5 et 12). On trouve ensuite 2 copies juste sous la moyenne d'épreuve (8.5 et 8.3). L'écart se creuse avec les copies suivantes qui font une mauvaise performance sur cet épreuve : 2 copies (7 et 7.2) puis 3 copies (5.6, 5.2 et 4.9)

Exercice 2 - Partie A

Dans une représentation paramétrique, le domaine où varie le paramètre ne doit pas être oublié :
$\Delta_+ : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \end{cases}$, $t \geqslant 0$ décrit la droite $\Delta = \mathrm{A}(1,0) + \mathrm{Vect}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ mais $\Delta_+ : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \end{cases}$, $t \geqslant 0$ décrit la demi-droite [AB) où B(3,1)
$\Lambda_0 : \begin{cases} x = \mathrm{R}\cos t \\ y = \mathrm{R}\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ décrit le cercle de centre O(0,0) de rayon R mais $\begin{cases} x = \mathrm{R}\cos t \\ y = \mathrm{R}\sin t \end{cases}$, $t \in [0,\pi]$ décrit un demi-cercle !
Attention ! Le rayon ou, plus généralement, les paramètres d'une conique ne doivent pas dépendre du paramètre.
Pour décrire $\Lambda_1 : \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin t \cos t \end{cases}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, il faut d'abord ré-écrire le paramétrage en s'appuyant sur les formules de duplication $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ et $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$ qui ont été trop peu ou mal restituées...
On obtenait : $\Lambda_1 : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) \\ y = 0 + \frac{1}{2}\sin(2t) \end{cases}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ qui permet d'identifier un cercle <u>en totalité</u> car $2t \in [-\pi, \pi]$
Attention à la rédaction :
Ne pas confondre = et $\Leftrightarrow$! Un système d'équation n'est pas "égal" à un autre système mais il peut lui être "équivalent"...

Exercice 2 - Partie B

Commençons par un point notation/sens :
Λ_2 est, par définition, une courbe...Quel sens donnez-vous à Λ_2' que je retrouve dans de trop nombreuses copies ?
On ne dérive pas la courbe Λ_2...mais on dérive la fonction vectorielle $f_2(t) = \left[t \mapsto \overrightarrow{\mathrm{OM}_2(t)}\right] = \left[t \mapsto \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}\right]$ associée à Λ_2 !
On définit la courbe paramétrée par un système d'équation $\Lambda_2 : \begin{cases} x_2(t) = \dots \\ y_2(t) = \dots \end{cases}$, $t \in \mathrm{I}_2$ par contre on dérive un vecteur $f_2'(t) = \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$... Les formes hybrides « $\Lambda_2' : \begin{cases} x_2'(t) = \dots \\ y_2'(t) = \dots \end{cases}$ ou $f_2'(t) = \begin{cases} x_2'(t) = \dots \\ y_2'(t) = \dots \end{cases}$ » ne sont pas acceptables !

1. Beaucoup (trop) d'élèves se trompent sur la formule du cours de la longueur, est-ce bien sérieux !
   Pour la longueur, il s'agit d'intégrer $s'(t) = \|f'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ et pas $\|f(t)\|$!
   Parfois, le calcul de $s'(t)$ a été toutefois réalisé plus loin (pour le calcul de $\overrightarrow{\mathrm{T}}$) permettant de restituer des points sur cette question où ces calculs étaient des attendus. De plus, si les calculs restent cohérents et le permettent, j'ai valorisé les copies où les évaluations de $e^{3\ln 2}$ et $e^{-\ln 3}$ ont été bien réalisés.
2. Une question ouverte pour valoriser les candidats plus intuitifs : la courbe est définie pour $t \in \mathbb{R}$ et pas sur un segment $[a,b]$ aussi il s'agit de calculer la longueur $\ell_{[a,b]}$ puis de faire tendre $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$: $\ell_{[a,b]} = \sqrt{2}\left(e^b - e^a\right) \xrightarrow[a\to-\infty, b\to+\infty]{} +\infty$
   Attention à l'erreur consistant à croire que la courbe n'est pas de longueur finie car « I_2 n'est pas borné » : la portion de courbe de Λ_2 sur $]-\infty, 0]$ est bien de longueur finie puisque $\ell_{[a,0]} = \sqrt{2}(1 - e^a) \xrightarrow[a\to-\infty]{} \sqrt{2}$
   De même, on peut avoir une courbe qui n'est pas de longueur finie alors que la paramètre ne décrit un intervalle borné : c'est le cas de la courbe de la fonction inverse sur $]0,1]$: $\ell_{[\varepsilon,1]} = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_\varepsilon^1 \sqrt{\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} +\infty$
   Sur le corrigé, je propose une autre rédaction (plus rigoureuse) utilisant un raisonnement par l'absurde.
3. Cette question n'a quasiment pas été abordée dans la classe. Vous n'êtes pas assez combatifs sur ce type de question... Toutes les traces de recherche peuvent être valorisées dans ce type de question ! En effet, ce n'est pas, effectivement, une question directe de cours (contrairement à Q1, Q4 ou Q5) et il faut l'aborder par étape : on vous demande de vérifier l'alignement des points où la tangente est verticale. Aussi, il faut :
   - commencer par déterminer ces points qui sont caractérisés par $x_2'(t) = 0$

- résoudre cette équation $x_2'(t)=0$ pour trouver les paramètres t des points à tangente verticale
- déterminer les coordonnées de ces points
- constater l'alignement sur une droite qu'il faut préciser

Il s'agit, sans nul doute, d'une question qui permet de distinguer des candidats sur ce sujet...

4. Il faut répondre à la question posée : on vous demande le repère de Frenet...pas seulement les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ de la bases de Frenet...Les deux approches étaient possibles pour la courbure. Si vous utilisez une formule de Frenet, est-ce bien utile de comparer les deux coordonnées de $\dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt}$ et de $\gamma\overrightarrow{N}$? Mais, si vous le faîtes, vous devez trouver la même chose pour γ sans quoi il y a une erreur dans vos calculs qu'il est souhaitable de signaler sur votre copie!
Les définitions du cours et la cohérence des calculs sont valorisés dans la notation même si les résultats finaux sont faux.

5. Vous devez expliciter la définition que vous utilisez pour la développée. Ici, le sujet dirigeait nettement vers la définition :

« La développée est la courbe décrite par les centres $C_2(t)$ de courbure où $\overrightarrow{OC_2}=\overrightarrow{OM_2}+R\overrightarrow{N}$ »

Revenir à la caractérisation : « La développée est l'enveloppe des normales à la courbe » est une perte de temps car tous les calculs sont à faire...mais c'est mieux que rien si on ne parvient pas à mobiliser l'autre définition...

6. Question peu traitée car les complexes continuent à vous faire peur alors qu'il suffisait de donner les affixes des points et de connaître la définition du cours d'une rotation plane...

Exercice 2 - Partie C

1. Bien fait en général mais...attention : $\sin^2(-t)=\big(\sin(-t)\big)^2=(-\sin t)^2=\sin^2(t)\neq-\sin^2(t)$!

2. Attention à la confusion entre fonction f/expression $f(t)$! C'est la fonction qui est continue, dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Les zéros et le signe d'une dérivée doivent être justifiés (remplir le tableau n'est pas une justification, c'est juste le bilan)
Pour cela, il faut FACTORISER ces dérivées puis repérer les facteurs >0 qui ne contribuent pas au signe et aux zéros.
Attention, obtenir le signe en évaluant la dérivée en une valeur n'est pas une justification (une vérification à la limite...)
Les limites doivent être également justifié soit par les théorèmes usuels, soit par équivalents/DL si plus complexes.

3. Rappeler les définitions du cours : le point $M_3(0)$ est stationnaire $\underline{\text{car } x_3'(0)=0=y_3'(0)}$
On pouvait éviter le calcul de DL en raisonnant habilement avec des équivalents (voir corrigé).
<u>Je vais détailler ici un travail de DL dans un but pédagogique</u> car vous êtes nombreux à avoir des difficultés avec les DL.
En partant de DL simple du cours,allons chercher les DL les plus grand qu'on puisse obtenir pour $x_3(t)$ et $y_3(t)$:
$\sin(t)=t-\dfrac{t^3}{3!}+o(t^4)$ d'où $\sin^2(t)=\left(t-\dfrac{t^3}{3!}+o(t^4)\right)\left(t-\dfrac{t^3}{3!}+o(t^4)\right)$ On commence par examiner le o issu du produit :
$t\times o(t^4)=o(t^5)$ donne le plus petit des o aussi on va pouvoir obtenir un DL_5 pour $\sin^2(t)$
les termes d'ordre $\geqslant 6$ sont absorbés dans ce $o(t^5)$ (à savoir $-\frac{t^3}{3!}\times-\frac{t^3}{3!}$ et les $-\frac{t^3}{3!}\times o(t^3)$)
Il reste : $\sin^2(t)=t\times t+t\times\left(-\frac{t^3}{3!}\right)+\left(-\frac{t^3}{3!}\right)\times t+o(t^5)=t^2-2\times\dfrac{t^4}{3!}+o(t^5)=t^2-\dfrac{t^4}{3}+o(t^5)$
On peut maintenant obtenir un DL de $y_3(t)=\dfrac{\sin^3(t)}{\cos(t)}=\sin^2(t)\times\tan(t)=\left(t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^5)\right)\left(t+\frac{t^3}{3}+o(t^4)\right)$
$o(t^5)\times t=o(t^6)=t^2\times o(t^4)$ donne l'ordre du DL qu'on va pouvoir obtenir et : $y_3(t)=t^3+\frac{t^5}{3}-\frac{t^5}{3}+o(t^6)=t^3+o(t^6)$
dans le développement : $t^2\times o(t^4)$ et $-\frac{t^4}{3}\times\left(\frac{t^3}{3}+o(t^3)\right)$ disparaissent dans le $o(t^6)$
<u>Toujours, dans un but pédagogique, on va obtenir ce DL par une autre méthode</u> :
On cherche d'abord un DL de $\sin^3(t)$: $\sin^3(t)=\sin^2(t)\times\sin t=\left(t^2-\frac{t^4}{3}+o(t^5)\right)\left(t-\dfrac{t^3}{3!}+o(t^4)\right)$
$o(t^5)\times t=o(t^6)=t^2\times o(t^4)$ donne l'ordre du DL issu du produit et il reste : $\sin^3(t)=t^3-\dfrac{t^5}{3!}-\dfrac{t^5}{3}+o(t^6)=t^3-\dfrac{t^5}{2}+o(t^6)$
car $-\frac{1}{3!}-\frac{1}{3}=-\frac{1+2}{2\times3}=-\frac{1}{2}$
Puis $\dfrac{1}{\cos t}$ où $\cos(t)=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+o(t^5)$ d'où $\dfrac{1}{\cos(t)}=\dfrac{1}{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+o(t^5)}=\dfrac{1}{1-u(t)}$ avec $u(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4!}+o(t^5)\xrightarrow[t\to0]{}0$
Or : $\dfrac{1}{1-u}=1+u+u^2+o(u^2)$ où $u(t)\sim_0\frac{t^2}{2}$ donc on aura $o\big(u(t)^2\big)=o(t^4)$ qui absorbe le $o(t^5)$ qui apparaît dans le $u(t)$
L'ordre du DL sera 4 et on oublie dans le développement tous les termes sont avalés dans le $o(t^4)$:
$\dfrac{1}{\cos(t)}=1+\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4!}\right)+\left(\frac{t^2}{2}\right)^2+o(t^4)$ dans le développement du carré : $2\times\frac{t^2}{2}\times o(t^4)$ et $o(t^4)^2$ sont dans $o(t^4)$ soit $\dfrac{1}{\cos(t)}=1+\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{5}{4!}t^4+o(t^4)$
On peut enfin passer à $y_3(t)$: $y_3(t)=\dfrac{\sin^3(t)}{\cos(t)}=\sin^3(t)\times\dfrac{1}{\cos(t)}=\left(t^3-\dfrac{t^5}{2}+o(t^6)\right)\left(1+\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{5}{4!}t^4+o(t^4)\right)$
Le DL est limité par $o(t^6)\times1=o(t^6)$ et en développant :

$y_3(t) = t^3 + \dfrac{t^5}{2} - \dfrac{t^5}{2} + o(t^6) = t^3 + o(t^6)$ les termes $t^3 \times \frac{t^4}{2}, -\frac{t^5}{2} \times \left(\frac{t^2}{2} - \frac{5}{4!}t^4 + o(t^5)\right)$ sont absorbés par le $o(t^6)$

Pour Q3, il n'était absolument pas utile d'aller aussi loin puisqu'on pouvait se limiter à l'ordre 3 pour conclure...

Attention à bien lire la question : il ne suffit pas de donner la nature du point stationnaire, il faut aussi préciser la tangente!

4. Cette question a perturbée certains étudiants car le point $M_3(\frac{\pi}{4})$ est régulier aussi il n'apparaît pas dans le tableau de variation. L'objectif est d'améliorer le tracé en ajoutant un point tout en testant la connaissance du cours sur les points réguliers.
5. Attention au vocabulaire : vous ne devez pas confondre les termes
« branche infinie », « branche parabolique » et « asymptote »!
6. Le tracé dresse le bilan des questions précédentes : l'unité doit être respectée, le point $M_3(0)$ doit être placé avec sa tangente, le point $M_3(\pi/4)$ et sa tangente également ainsi que la droite asymptote $x = 1$. Le tracé doit insister sur les deux tangentes(on dit qu'il faut marquer les tangentes) et le comportement de la courbe près de l'asymptote ainsi que sur la symétrie d'axe (Ox) repérée (qui va naturellement souligné en $M_3(0)$ le rebroussement)

Exercice 2 - Partie D

Cette partie a été très peu traitée dans la classe...

1. Des erreurs stupides dans ces calculs de dérivées : la dérivée de tan n'est pas toujours connue $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$,
des erreurs dans des formules classiques de dérivées $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (et pas $\dfrac{u'v + uv'}{v^2}$) et $\left(u^\alpha\right)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$
Ainsi : $\left(1 + \tan^2(t)\right)' = 0 + \left(\tan^2(t)\right)' = 2 \times (1 + \tan^2 t) \times \tan(t)$
2. Une question « simple » où vous pouviez facilement gagner des points!
La droite $\mathscr{D}_t$ est donné par une équation cartésienne $k(t)x - y - h(t) = 0$
C'est une équation du type $ax + by + c = 0$ avec $a = k(t)$, $b = -1$ et $c = -h(t)$ où t constante fixée lorsqu'on travaille sur $\mathscr{D}_t$
On sait que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ k(t) \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)$ est directeur. L'intersection de $\mathscr{D}_t$ avec l'axe des ordonnées s'obtient quand $x = 0$ (et pas $y = 0$!) et donne un unique point de coordonnées $A(t) = (0, -h(t))$ en injectant dans l'équation.
On connaît un point et un vecteur directeur donc $\mathscr{D}_t = A(t) + \text{Vect}(\vec{u})$ qui permet d'obtenir une représentation paramétrique : $\mathscr{D}_t : \begin{cases} x = 0 + s \times 1 \\ y = -h(t) + s \times k(t) \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$ Le nom du paramètre est libre s, λ, toto mais pas t, x, y, h, k déjà définis ou e, π!
3. Il s'agissait de mettre en place la technique du calcul d'enveloppe. Il faut bien penser à justifier que $\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = -k'(t)$ ne s'annule pas avant de diviser...

Exercice 3 - Partie A

1. Une question triviale...qui révèle de grosses surprises parfois!
2. **a.** Bien fait en général.
   b. Vous avez, en général, repérer la CS de diagonalisation (polynôme caractéristique scindé à racines simples)
   c. Attention à ne pas oublier l'argument de dimension : ici, toutes les valeurs propres sont simples donc les sev propres sont tous de dimension 1
   Expliquer (au moins une fois) comment vous déterminez l'espace propre : comme vous connaissez la dimension, vous cherchez le nombre adéquat de vecteurs linéairement indépendants dans l'espace en vous aidant des colonnes de la matrice.
   Attention à bien respecter les consignes : les coefficients de la diagonale de D doit être dans l'ordre croissant!
   Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé!
3. On peut traiter cette question sans avoir trouvé P et D auparavant.
   a. Bien souvent, ceux qui ont traité la question ont raisonné par double implication alors qu'on peut travailler par équivalence.
   b. Peu traiter alors qu'on avait vu ce type de question en TD (recherche de racine carré ou solution d'équation) :
   si $M^2 - 2M = A$ alors $MA = M(M^2 - 2M) = M^3 - 2M^2 = (M^2 - 2M)M = AM$!
   c. La question « classante » de cet exercice qui se traite assez bien en raisonnant en « on sait, on veut, on prouve » à condition de bien connaître les définition...
   La dernière partie de la question nécessite plus de recul : $E_\lambda(A)$ est de dimension 1 (d'après Q2) et X est un vecteur propre donc $X \in E_\lambda(A)$ et $X \neq 0$ soit $E_\lambda(A) = \text{Vect}(X)$.
   Aussi : $Y = MX \in E_\lambda(A) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$, $Y = MX = \alpha X$ et donc X est bien vecteur propre de M
   d. Un seul élève a traité cette question dans la classe.
4. La question a) était assez simple et revenait sur les équations de la question 1
La question b utilise l'équivalence prouvée en 3a). Là encore, il n'est pas nécessaire de calculer P^{-1} vu l'énoncé.