Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 1 feuille de papier millimétré.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les questions non correctement référencées ne seront pas notées**. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.

Tournez la page S.V.P

Premier exercice.

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$.

On considère la surface S de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = u + 3v \\ y = u\,v \\ z = \sin(\pi\,u) + \cos(\pi\,v) \end{array}\right., \ (u,\,v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u,\,v)$ le point de S de paramètres u et v.

1. Démontrer que $M(-1,\,1)$ est l'unique point de S de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en $M(-1,\,1)$.

Deuxième exercice.

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

On considère les fonctions

- r_0 définie sur $I_0 = [0\,;\,2\pi]$ par $\forall t \in I_0,\ r_0(t) = R$ où $R > 0$;
- r_1 définie sur $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\forall t \in I_1,\ r_1(t) = \cos(t)$.
- r_2 définie sur $I_2 = \mathbb{R}$ par $\forall t \in I_2,\ r_2(t) = \mathrm{e}^t$.
- r_3 définie sur $I_3 = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\forall t \in I_3,\ r_3(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$.

Enfin r_4 désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I_4 = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $n \in [\![0\,;\,4]\!]$, on note

- Λ_n la courbe de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x_n(t) = r_n(t)\cos(t) \\ y_n(t) = r_n(t)\sin(t) \end{array}\right.,\ t \in I_n$;
- $M_n(t)$ le point de Λ_n de paramètre t pour $t \in I_n$.

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A :

1. Quelle est la nature de Λ_0 ? Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Démontrer que Λ_1 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Partie B :

1. Calculer la longueur de Λ_2 entre les points $M_2(-\ln(3))$ et $M_2(3\ln(2))$.
2. La courbe Λ_2 est-elle de longueur finie ?
3. Démontrer que tous les points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale sont alignés. On précisera un point et un vecteur directeur de la droite qui les contient.

4. Soit $M_2(t)$ un point de Λ_2.
   Donner le repère de Frenet puis la courbure de Λ_2 au point $M_2(t)$.
5. Déterminer une représentation paramétrique de la développée $\mathcal{C}_2$ de Λ_2.
6. Démontrer que $\mathcal{C}_2$ est l'image de Λ_2 par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   On pourra s'intéresser aux affixes complexes des différents points considérés.

Partie C :

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ_3 à $I'_3 = \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Préciser comment obtenir la courbe Λ_3 en entier.
2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x_3 et y_3 sur I'_3.
   Préciser les valeurs et/ou les limites au bord.
3. Quelle est la nature du point $M_3(0)$?
   Préciser la tangente en ce point.
4. Donner les coordonnées du point $M_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ainsi que celles d'un vecteur directeur de la tangente à Λ_3 en ce point.
5. Etudier la branche infinie lorsque t tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.
6. Tracer la courbe Λ_3 sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet. On y fera apparaitre les éléments déterminés dans les questions précédentes.
   Unité : 8cm

Partie D :

On considère les 2 fonctions h et k définies sur I_4 par $\forall t \in I_4$,

$$h(t) = t^2\,(1+\tan^2(t))$$
$$k(t) = \tan(t) + t\,(1+\tan^2(t)).$$

Ainsi que la famille de droites $(D_t)_{t\in I_4}$ d'équation cartésienne :

$$k(t)\,x - y = h(t).$$

1. Démontrer que $\forall t \in I_4$,
$$h'(t) = 2t\,(1+\tan^2(t))\,(1+t\,\tan(t))$$
$$k'(t) = 2\,(1+\tan^2(t))\,(1+t\,\tan(t)).$$
2. Soit $t \in I_4$. Déterminer l'intersection de la droite D_t avec l'axe des ordonnées ainsi qu'un vecteur directeur de la droite D_t puis en déduire une représentation paramétrique de la droite D_t.
3. Déterminer une représentation paramétrique de l'enveloppe $\mathcal{C}_4$ de la famille de droites $(D_t)_{t\in I_4}$.
4. Existe-t-il une fonction r_4 telle que $\mathcal{C}_4 = \Lambda_4$?

Troisième exercice.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{E}_1)$: $M^2 - 2M = A$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre les trois équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,
   $(E_1) : x^2 - 2x = 0$ $\qquad (E_2) : x^2 - 2x = -1$ $\qquad (E_3) : x^2 - 2x = 3$
2. (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   On classera les coefficients de la diagonale de D par ordre croissant.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 1.
   (a) Démontrer que $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$.
   On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.
   (b) Démontrer que $MA = AM$.
   (c) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
   Démontrer que le vecteur $Y = MX$ appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et en déduire que X est un vecteur propre de M.
   (d) En déduire que la matrice Δ est diagonale.
4. (a) Déterminer toutes les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$.
   (b) En déduire toutes les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$. On exprimera ces matrices M à l'aide de P et de matrices diagonales à préciser.

Partie B :

Cette partie s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2)$: $M^2 - 2M = \alpha I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M.
2. Soient M une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ une valeur propre de M.
   Etablir que $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$.
   (a) Soit $\alpha = -1$. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si 1 est valeur propre double de M.
   (b) Soit $\alpha \neq -1$. Démontrer que si M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors M est diagonalisable. Préciser les matrices diagonales D, semblables à M, possibles (à l'aide de λ_1 et λ_2).
   (c) Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$.
   (d) Pour $\alpha = 0$, donner une matrice M non diagonale solution de $(\mathcal{E}_2)$. On explicitera ses 4 coefficients.

Fin de l'épreuve

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1005 – D'après documents fournis