PT 2024-2025 : Correction du DS n° 3

APPLICATION DIRECTE DU COURS *Durée conseillée : 30 min*

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{e^{2n}}\dbinom{2n}{n}$

On a : $u_n = \dfrac{1}{e^{2n}}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{e^{2n}} \times \dfrac{(2n)!}{n! \times n!} > 0$ et on étudie la convergence avec la règle de d'Alembert :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{1}{e^{2n+2}}\frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2} \times e^{2n} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{e^2} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{4n^2}{e^2n^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{4}{e^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{e^2}$$

Comme $e \simeq 2,7 > 2$, $\dfrac{4}{e^2} = \dfrac{2^2}{e^2} < 1$ et on peut conclure que $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge (absolument)}}$

2. *Un contre-exemple*

a. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mais qu'elle ne converge pas absolument.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 en décroissant donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge}}$ par application du théorème des séries alternées.

Par contre : $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ est une série de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$ donc, d'après le critère de Riemann, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|$ diverge et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ ne converge pas absolument}}$

b. Démontrer que le terme général du produit de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec elle même est

$w_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$ *On pourra considérer que le terme d'indice $n = 0$ de* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est* 0

On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ si $n \geqslant 1$ et $u_0 = 0$ (comme conseillé par le sujet)

D'après le cours, le terme général du produit de Cauchy de $\sum u_n$ avec elle-même est

$w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$ car $u_0 = u_{n-n} = 0$ et donc : $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \times \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$

c. Justifier que, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\sqrt{k}\sqrt{n-k} \leqslant n$. En déduire $\sum w_n$ diverge grossièrement.

Par croissance de la racine carré, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$: $k \leqslant n \Rightarrow \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ et $n - k \leqslant n \Rightarrow \sqrt{n-k} \leqslant \sqrt{n}$

Alors : $\sqrt{n-k} \leqslant \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{k}\sqrt{n-k} \leqslant \sqrt{k}\sqrt{n}$ mais $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{k}\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}\sqrt{n}$

et, par transitivité : $\sqrt{k}\sqrt{n-k} \leqslant \sqrt{n}\sqrt{n} \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{k}\sqrt{n-k} \leqslant n \text{ pour } k \in [\![1, n-1]\!]}$

Alors : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geqslant \dfrac{1}{n}$ et, en sommant les inégalités : $|w_n| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}}_{=\frac{n-1}{n}}$

Aussi : $|w_n| \geqslant \dfrac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et, par minoration, $|w_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui assure que (w_n) ne tend pas vers 0 et donc $\boxed{\sum w_n \text{ diverge grossièrement}}$

d. En déduire un contre-exemple pour l'un des résultats de cours (expliquer)

On vient de prouver que la convergence du produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ n'est pas assurée lorsque ces séries convergent sans converger absolument. En effet, on a ici un produit de Cauchy de deux séries convergentes mais non absolument convergente qui est grossièrement divergent.

PROBLÈME N° 1 *Un ensemble de matrices - oral maths II 2023* *Durée conseillée : 45 min*

Soit, pour un réel a fixé, $A(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et on considère $\mathscr{A} = \{A(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

1. $\mathscr{A}$ est-il un sev de $M_3(\mathbb{R})$?

On a, pour tout réel a, $A(a) \neq O$ (si $a = 0$ alors $A(0) = I_3$, si $a \neq 0$, les coefficients hors diagonale sont non nuls.

Ainsi, $\boxed{\mathscr{A} \text{ ne peut pas être un sev de } M_3(\mathbb{R})}$ puisqu'il ne contient pas le vecteur nul de $M3(\mathbb{R})$

2. Prouver que $\mathscr{A}$ est stable par le produit matriciel.

On choisit a et b deux réels et on calcule $A(a)A(b)$:

$$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1-2a)(1-2b)+ab+ab & (1-2a)b+a(1-2b)+ab & (1-2a)b+ab+a(1-2b) \\ a(1-2b)+(1-2a)b+ab & ab+(1-2a)(1-2b)+ab & ab+(1-2a)b+a(1-2b) \\ a(1-2b)+ab+(1-2a)b & ab+a(1-2b)+(1-2a)b & ab+ab+(1-2a)(1-2b) \end{pmatrix}$$

$= A(c)$ avec $c = (1-2a)b + a(1-2b) + ab = a + b - 3ab$ puisque

$(1-2a)(1-2b) + ab + ab = 1 - 2a - 2b + 4ab + 2ab = 1 - 2(a + b - 3ab) = 1 - 2c$

Ainsi : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $A(a) \times A(b) \in \mathscr{A}$ donc $\boxed{\mathscr{A} \text{ est stable par le produit matriciel}}$

3. Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que $A(a)$ ne soit pas inversible.

$A(a)$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow \det A(a) = 0$ or :

$$\det A(a) = \begin{vmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1-2a & a \\ 1 & a & 1-2a \end{vmatrix} \text{ par } C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-3a & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{vmatrix} \text{ avec } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$
$= (1-3a)^2$ car ce dernier déterminant est triangulaire

Finalement : $A(a)$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow \det A(a) = 0 \Leftrightarrow (1-3a)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$

4. Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que $A(a)$ soit la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

$A(a)$ est la matrice d'un projecteur $\Leftrightarrow A(a)^2 = A(a)$

or, avec $a = b$ dans les calculs de la question 2, on a : $A(a)^2 = A(c)$ avec $c = a + a - 3a^2 2 = 2a - 3a^2$

aussi : $A(c) = A(a) \Leftrightarrow c = a \Leftrightarrow 2a - 3a^2 = a \Leftrightarrow a - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow a(1-3a) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 0 \text{ ou } a = \frac{1}{3}}$

5. On choisit $a_0 \neq 0$ tel que $B = A(a_0)$ soit la matrice d'un projecteur.

Justifier que $C = I_3 - B$ est aussi la matrice d'un projecteur. Vérifier que $BC = CB = 0$.

Que vaut B^n pour $n \in \mathbb{N}$? Que vaut C^n pour $n \in \mathbb{N}$?

D'après le cours, si p est le projecteur associé à B càd le projecteur sur $F = \operatorname{Im} B$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker} B$ alors $\boxed{q = id - p \text{ associé à la matrice } C = I_3 - B \text{ est le projecteur sur } G = \operatorname{Ker} B \text{ parallèlement à } F = \operatorname{Im} B}$

OU BIEN

$C^2 = (I_3 - B)^2 = I_3^2 - 2I_3B + B^2$ car I_3 et B commutent d'où $C^2 = I_3 - 2B + B$ car $B^2 = B$ donc $C^2 = I_3 - B = C$ et C est bien une matrice de projecteur.

On vérifie : $BC = B(I_3 - B) = B - B^2 = B - B = \boxed{0 = BC}$ et $CB = (I_3 - B)B = B - B^2 = B - B = \boxed{0 = CB}$

Enfin, d'après les définitions des puissances itérées : $\boxed{B^0 = I_3, B^1 = B}$ et, puisque B est la matrice d'un projecteur, $B^2 = B$ puis $B^3 = B \times B^2 = B \times B = B^2 = B$ Ainsi, par une récurrence simple, on démontre facilement que $\boxed{B^n = B \text{ si } n \geqslant 2}$

Pour la même raison puisque C est la matrice d'un projecteur, on a : $\boxed{C^0 = I_3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, C^n = C}$

6. Trouver un réel λ (qu'on exprimera à l'aide de a) tel que $A(a) = B - \lambda C$.

D'après 4., $a_0 = \dfrac{1}{3}$ donc B ne possède que des coefficients $\dfrac{1}{3}$ (puisque sur la diagonale $1 - 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$)
Deux matrices sont égales si les coefficients sont égaux :
$A(a) = B - \lambda C = B - \lambda(I_3 - B) = (1+\lambda)B - \lambda I_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2a = (1+\lambda) \times \frac{1}{3} - \lambda \text{ (coefficients sur la diagonale)} \\ a = (1+\lambda) \times \frac{1}{3} \text{ (coefficients hors diagonale)} \end{cases}$
La seconde équation donne $\boxed{\lambda = 3a - 1}$ et on vérifie que la première équation est aussi vérifiée.

7. En déduire $[A(a)]^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. La relation trouvée est-elle vraie pour $n = 0$ et $n = 1$

Pour simplifier, on notera $A = A(a)$.
On utilise la formule du binôme sachant $A = B - \lambda C$ (question 6) et que B et C commutent (question 5)
Si $n \geqslant 2$:
$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k(-\lambda C)^{n-k} = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \underbrace{B^0}_{=I_3} \underbrace{(-\lambda)^n C^n}_{=(-\lambda)^n C} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} \underbrace{B \times C}_{=0} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} \underbrace{B^n}_{=B} \underbrace{(-\lambda)^0 \times C^0}_{=1\times I_3} \quad \text{avec question 5}$$
Ainsi, : $A^n = (-\lambda)^n C + B$ soit : $\boxed{[A(a)]^n = B + (3a-1)^n C \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant 2}$
Si $n = 0$: $B + (3a-1)^0 C = B + 1 \times (I_3 - B) = I_3 = A(a)^0$ et la relation reste vraie
Si $n = 1$: $B + (3a-1)^1 C = B - \lambda C = A(a)$ d'après 6 et la relation reste vraie
$\boxed{\text{La relation reste vraie pour } n = 0 \text{ et } n = 1}$

PROBLÈME N° 2 *Résolutions d'équations différentielles* *Durée conseillée : 45 min*

1. *Un problème de Cauchy du premier ordre*

a. Pour $x > 0$, établir à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = 1 - \frac{1 + \ln x}{x}$

On utilise une intégration par parties avec $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t^2} \\ v(t) = \ln t \end{cases}$ soit $\begin{cases} u(t) = -\dfrac{1}{t} \\ v(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ où u et v sont de classe C^1 sur I
(donc sur $[e, x]$ ou $[x, e]$) alors :
$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \times \ln t\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right) \times \frac{1}{t} dt = -\frac{\ln x}{x} - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{ soit } \boxed{\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = 1 - \frac{1+\ln x}{x}}$$

b. Résoudre alors sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy $\begin{cases} xy' - y = \ln x \\ y(1) = 0 \end{cases}$

• <u>On commence par résoudre l'équation homogène sur $I =]0, +\infty[$</u> : $xy' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{x} y = 0$ car $x \neq 0$
Une primitive que $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ est $A(x) = -\ln|x| = -\ln x$ (car $x > 0$ sur I) et donc les solutions homogènes sont d'expression $Ch(x)$ où $h(x) = e^{-(-\ln x)} = e^{\ln x} = x$ et $C \in \mathbb{R}$.
• <u>On cherche une solution particulière</u> par la méthode de variation de la constante autrement dit sous la forme $y(x) = C(x)h(x)$ où C est dérivable sur I : $y'(x) = C'(x)h(x) + C(x)h'(x)$ et donc :
$$xy'(x) - y(x) = \ln x \Leftrightarrow xC'(x)h(x) + \underbrace{xC(x)h'(x) - C(x)h(x)}_{\substack{=C(x)\times(xh'(x)-h(x)=C(x)\times 0 \\ \text{puisque } h \text{ est une solution homogène}}} = \ln x \Leftrightarrow xC'(x)h(x) = \ln x \Leftrightarrow C'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$
Or, la question 1.a. donne l'expression sur I d'une primitive $C(x) = -\dfrac{1 + \ln x}{x}$ (en laissant tomber la constante...)
Ainsi, l'expression d'une solution particulière est $y(x) = C(x)h(x) = -(1 + \ln x)$
• <u>On connaît donc l'expression d'une solution de l'équation</u> sur I est $y(x) = C \times x - (1 + \ln x)$ où $C \in \mathbb{R}$
et on détermine la constante à l'aide de la condition initiale : $y(1) = 0 \Leftrightarrow C - 1 = 0 \Leftrightarrow C = 1$
$\boxed{\text{L'unique solution de ce problème de Cauchy sur }]0, +\infty[\text{ a pour expression } y(x) = x - (1 + \ln x)}$

2. *Résolution d'une équation du second ordre à l'aide d'une solution homogène*
On considère l'équation (E_1) : $t^2 y'' - 2y = 3t^2$ sur $I =]0, +\infty[$

a. Déterminer toutes les solutions homogènes de type polynômiale. *On pourra utiliser le coefficient dominant*

Si P est un polynôme non nul qui est solution homogène alors $X^2P'' - 2P = 0$
On pose $P = aX^n + R$ avec $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et R un polynôme avec $\deg(R) < n$ alors
$$X^2P'' = X^2\left(a \times n(n-1)X^{n-2} + R''\right) - 2(aX^n + R) = 0 \Leftrightarrow \left(n(n-1) - 2\right)aX^n + \underbrace{X^2R'' - 2R}_{=R_1} = 0$$
Or, un polynôme est nul si ses coefficients sont nuls donc $n(n-1) - 2 = 0$ car il n'y a pas de termes de degré n dans R_1 vu que $\deg(R_1) \leqslant \max(\deg(X^2R''), \deg R) = \max(\deg(2 + (\deg R - 2), \deg R) \leqslant \deg R < n$
Ainsi : $n(n-1) - 2 = 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow (n+1)(n-2) = 0 \Leftrightarrow n = 2$ car n est un entier naturel
Les solutions homogènes polynômiales non nulles sont donc de degré 2 aussi
on les recherche sous la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant
$X^2P'' - 2P = 0 \Leftrightarrow X^2 \times (2a) - 2(aX^2 + bX + c) = 0 \Leftrightarrow -2bX - 2c = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$ soit $P = aX^2$ où $a \in \mathbb{R}$
(Lorsque $a = 0$, on retrouve la solution nulle qui est trivialement une solution polynomiale homogène)
Ainsi, $\boxed{\text{les solutions homogènes polynômiales sont de la forme } aX^2 \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ formant le sev Vect}(X^2)}$

b. En vérifiant que $[t \mapsto t^2]$ est une solution homogène, donner l'expression des solutions de (E_1)

On a déjà vu (à la question précédente) que $[t \mapsto t^2]$ est une solution homogène (prendre $a = 1$).
Si la question précédente n'a pas été traité, il faut vérifier que $[t \mapsto t^2]$ est une solution homogène :
Il est clair que : $\forall t > 0$, $t^2(t^2)'' - 2t^2 = t^2 \times 2 - 2t^2 = 0$ donc $h = [t \mapsto t^2]$ est une solution homogène.
• <u>Abaissement de l'ordre par la méthode de Lagrange</u>
On cherche alors toutes les solutions de l'équation sous la forme $y(t) = h(t)z(t)$ avec z deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$: $y = h \times z$, $y' = h'z + hz'$ et $y'' = h''z + 2h'z' + hz''$
$$t^2y'' - 2y = 3t^2 \Leftrightarrow t^2(h''z + 2h'z' + hz'') - 2hz = 3t^2 \Leftrightarrow \underbrace{(t^2h'' - 2h)}_{=0} z + (2t^2h')z' + (t^2h)z'' = 3t^2$$
$$\Leftrightarrow Y = z' \text{ est solution de } t^4Y' + 4t^3Y = 3t^2 \quad \text{car } h(t) = t^2$$
• <u>Résolution de l'équation du premier ordre</u>
On résout, sur $]0, +\infty[$: $t^4Y' + 4t^3Y = 3t^2 \Leftrightarrow Y' + \dfrac{4}{t}Y = \dfrac{3}{t^2}$ car $t \neq 0$.
Une primitive de $a(t) = \dfrac{4}{t}$ sur $]0, +\infty[$ est $A(t) = 4\ln t = \ln(t^4)$. Aussi, les solutions homogène ont pour expression $C \times H(t)$ où $H(t) = e^{-\ln(t^4)} = \dfrac{1}{t^4}$
On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante avec $Y(t) = C(t)H(t)$ où C est dérivable sur $]0, +\infty[$:
$$Y'(t) + \frac{4}{t}Y(t) = \frac{3}{t^2} \Leftrightarrow C'(t) \times H(t) + \underbrace{C(t) \times H'(t) + \frac{4}{t}C(t) \times H(t)}_{C(t)\times 0 = 0 \text{ car H solution homogène}} = \frac{3}{t^2} \Leftrightarrow C'(t) = 3t^2 \quad \text{car } H(t) = \frac{1}{t^4}$$
$$\Leftrightarrow C(t) = t^3 + K \text{ où } K \in \mathbb{R}$$
• <u>Résolution de l'équation du second ordre</u>
$t^2y'' - 2y = 3t^2$ où $y(t) = h(t)z(t)$
$$\Leftrightarrow Y = z' \text{ solution de } Y' + \frac{4}{t}Y = \frac{3}{t^2} \Leftrightarrow z'(t) = C(t)H(t) = \frac{1}{t} + \frac{K}{t^4} \quad \text{où } K \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow_{H(t) = \frac{1}{t^4}} z(t) = \ln t + K \times \frac{t^{-3}}{-3} + B \quad \text{où } (K, B) \in \mathbb{R}^2$$
$$\Leftrightarrow z(t) = \ln t + \frac{A}{t^3} + B \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$
$$\Leftrightarrow_{h(t) = t^2} \boxed{y(t) = t^2 \ln t + \frac{A}{t} + Bt^2 \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

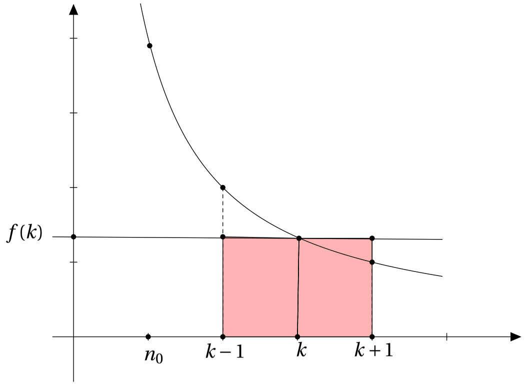
PROBLÈME N° 3 *D'après un sujet Banque PT de 2011 librement adapté* *Durée conseillée : 2h*

1. Question préliminaire :

Soit n_0 un entier naturel non nul, et f une fonction à valeurs positives, décroissante sur $[n_0,+\infty[$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant n_0+1$: $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$

(on accompagnera la réponse d'une illustration graphique)



• Les inégalités s'obtiennent en comparant graphiquement les « aires sous la courbe » (égales aux intégrales) et les « aires des rectangles de hauteur $f(k)$ » sur les segments $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$.
• Plus rigoureusement, pour $n_0 \leqslant k-1 \leqslant t \leqslant k$ alors : $f(t) \geqslant f(k)$ puisque f est décroissante.
En intégrant sur $[k-1,k]$, on a, par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\,dt$

or $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\,dt = f(k)\times\int_{k-1}^{k} dt = f(k)\times 1 = f(k)$ d'ou : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \geqslant f(k)$

• De manière analogue, pour $n_0 \leqslant k \leqslant t \leqslant k+1$, avec : $f(t) \leqslant f(k)$ on obtient de même : $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k)$

• Ainsi : $\boxed{\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \quad \text{si } k \geqslant n_0+1}$

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant n_0+1$: $\displaystyle\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$

On somme les inégalités précédentes pour $k \in [\![n_0+1,n]\!]$ où $n \geqslant n_0+1$:

$$\sum_{k=n_0+1}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

Par la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_{n_0+1}^{n} f(t)\,dt \quad\text{et}\quad \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$$

ainsi $\boxed{\displaystyle\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \quad \text{si } n \geqslant n_0+1}$

2. On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien ($\ln e = 1$).

Pour $t \geqslant e$, on considère la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$

a. Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $[e,+\infty[$, donner la valeur de $f'(t)$.

Par produit de fonctions usuelles, $[t \mapsto t(\ln t)^2]$ est dérivable sur $[e,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et elle ne s'y annule pas car $t>0$ et $\ln t \geqslant 1$ si $t \geqslant e$. Aussi, par quotient, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } [e,+\infty[}$ et on a :

$f = \dfrac{1}{u}$ où $u(t) = t(\ln t)^2$ aussi $f'(t) = -\dfrac{u'(t)}{u(t)^2}$ avec $u'(t) = 1\times(\ln t)^2 + t\times 2\times\dfrac{1}{t}\times(\ln t) = (\ln t)^2 + 2(\ln t)$

soit, finalement : $f'(t) = -\dfrac{(\ln t)^2+2(\ln t)}{t^2(\ln t)^4} \Leftrightarrow \boxed{f'(t) = -\dfrac{2+\ln t}{t^2(\ln t)^3}}$

b. En déduire les variations de f sur $[e,+\infty[$.

Si $t \geqslant e$ alors $\ln t \geqslant 1$ et $t>0$ aussi $t^2(\ln t)^3 > 0$ et $2+\ln t > 0$ de sorte que $f'(t) < 0$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement décroissante sur } [e,+\infty[}$

c. Déterminer une primitive de f sur $[e,+\infty[$.

On a $f(t) = v'(t)\times v(t)^{-2}$ où $v(t) = \ln t$ aussi une primitive est $\mathrm{F}(t) = \dfrac{v(t)^{-2+1}}{-2+1} = \boxed{-\dfrac{1}{\ln t} = \mathrm{F}(t)}$

d. Si S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 3} f(n)$, trouver des constantes réelles A et B telles que :

$$\mathrm{A} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{B} - \frac{1}{\ln n} \quad \text{pour } n \geqslant 4$$

On utilise le résultat de la question b des préliminaires avec $n_0 = 3 \geqslant e$ ce qui est possible car f est bien à valeurs positives et décroissantes sur $[3,+\infty[$ d'après les questions précédentes :

$$\int_4^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=4}^{n} f(k) \leqslant \int_3^{n} f(t)\,dt \quad \text{si } n \geqslant 4$$

Avec la primitive trouvée précédemment (en 1d), on a :

$$\int_4^{n+1} f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_4^{n+1} = -\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln 4} \quad\text{et}\quad \int_3^{n} f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_3^{n} = -\frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln 3} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{1}{3(\ln 3)^2} \leqslant \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln(n)} \Leftrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{3(\ln 3)^2}}_{=\mathrm{A}} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{3(\ln 3)^2}}_{=\mathrm{B}} - \frac{1}{\ln(n)}}$$

e. Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n\geqslant 3} f(n)$ et préciser un encadrement de sa somme.

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 3} f(n)$ est à termes positifs, la suite des sommes partielles (S_n) est croissante et donc elle converge si elle est majorée. Or, d'après l'inégalité précédente : $\forall n \geqslant 4$, $\mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{B} - \dfrac{1}{\ln n} \leqslant \mathrm{B}$

La suite (S_n) est croissante et majorée par le réel B donc elle converge et par conséquent :

$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 3} f(n) \text{ est donc convergente}}$

On peut alors passer à la limite dans l'encadrement précédent et on a : $\mathrm{A} \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{B} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{A} \leqslant \sum_{n=3}^{+\infty} f(n) \leqslant \mathrm{B}}$

3. Pour $t \geqslant e$, on considère désormais la fonction g définie par : $\quad g(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)}$

a. Prouver que $[t \mapsto t\ln t]$ est croissante sur $[e, +\infty[$. En déduire, la monotonie de g sur $[e, +\infty[$ sans calculer $g'(t)$

Par produit de fonctions dérivables sur $[e, +\infty[$, il est clair que $[t \mapsto t\ln t]$ est dérivable sur $[e, +\infty[$ et : $(t\ln t)' = \ln t + t \times \dfrac{1}{t} = 1 + \ln t \geqslant 1+1 > 0$ si $t \geqslant 2$. Aussi, $\boxed{[t \mapsto t\ln t] \text{ est strictement croissante sur } [e, +\infty[}$ et, par quotient, $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } [e, +\infty[}$

b. Déterminer une primitive de g sur $[e, +\infty[$

On a $\quad g(t) = \dfrac{v'(t)}{v(t)} \quad$ aussi une primitive est $G(t) = \ln|v(t)| \Leftrightarrow \boxed{G(t) = \ln(\ln t)} \quad$ car $\ln t > 0$ sur $[e, +\infty[$

c. Si on note T_n la somme partielle d'ordre n de $\sum\limits_{n \geqslant 3} g(n)$, trouver une constante réelle C telle que :

$$T_n \geqslant C + \ln(\ln(n+1)) \quad \text{pour } n \geqslant 4$$

On utilise à nouveau le résultat préliminaire b appliqué avec $n_0 = 3$ à la fonction g qui est bien décroissante et positive sur $[3, +\infty[\subset [e, +\infty[$. La première inégalité donne :

$$\sum_{k=4}^{n} g(k) \geqslant \int_4^{n+1} g(t)\,dt \Leftrightarrow T_n - \frac{1}{3\ln 3} \geqslant [\ln(\ln t)]_4^{n+1} \Leftrightarrow \boxed{T_n \geqslant \ln(\ln(n+1)) + \underbrace{\frac{1}{3\ln 3} - \ln(\ln 4)}_{=C} \text{ pour } n \geqslant 4}$$

d. Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 3} (-1)^n g(n)$ est convergente sans être absolument convergente.

Puisque g est à valeurs positives : $\quad \left|(-1)^n g(n)\right| = g(n)$.
D'après la question précédente : $\quad T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \quad$ par minoration car $C + \ln(\ln(n+1)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
aussi la série $\sum\limits_{n \geqslant 3} \left|(-1)^n g(n)\right| = \sum\limits_{n \geqslant 3} g(n)$ diverge car la suite de ses sommes partielles diverge et donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 3} (-1)^n g(n) \text{ ne converge pas absolument}}$$

Toutefois, la série $\sum\limits_{n \geqslant 3} (-1)^n g(n)$ est une série alternée avec $u_n = \left|(-1)^n g(n)\right| = g(n)$ et on vérifie que (u_n) tend vers 0 en décroissant (limite usuelle par quotient et la décroissance s'obtient via la décroissance de g) aussi le théorème des séries alternées s'applique : $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n \geqslant 3} (-1)^n g(n) \text{ converge}}$

4. On considère la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ définie par : $\quad H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \quad$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\quad \gamma_n = H_n - \ln n$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\quad \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$. En déduire que $(\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite bornée.

On utilise encore les inégalités obtenues en b dans les préliminaires sur la fonction h où $h(t) = \dfrac{1}{t}$ avec $n_0 = 1$ (la fonction inverse est bien décroissante et à valeurs positives sur $[1, +\infty[$.

On a : $\quad \displaystyle\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{dt}{t} \Leftrightarrow [\ln t]_2^{n+1} \leqslant H_n - 1 \leqslant [\ln t]_1^{n}$

$\Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln 2 \leqslant H_n - 1 \leqslant \ln n \Leftrightarrow \ln(n+1) + (1 - \ln 2) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$

Mais : $\quad 2 < e \Rightarrow \ln 2 < \ln e = 1 \Rightarrow 1 - \ln 2 > 0 \Rightarrow \ln(n+1) + (1 - \ln 2) \geqslant \ln(n+1) \quad$ et, par transitivité :

$$\boxed{\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n \quad \text{pour } n \geqslant 1}$$

Dés lors, en retranchant $\ln n$ dans chacun des membres : $\quad 0 < \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \gamma_n \leqslant 1 \quad$ autrement dit $0 < \gamma_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$: la suite (γ_n) est bornée

b. En utilisant la question a des préliminaire, montrer que (γ_n) est une suite monotone.
En déduire que la suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ converge. On notera ℓ sa limite.

Étudions la monotonie de la suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 1}$:

$\forall n \geqslant 1, \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n = H_{n+1} - H_n - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$

Utilise la question a avec h où $h(t) = \dfrac{1}{t}$ décroissante et positive sur $[1, +\infty[$ ($n_0 = 1$) avec $k = n+1 \geqslant 2$ si $n \geqslant 1$:

$h(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} h(t)\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \Rightarrow \gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant 0$ donc $\boxed{(\gamma_n)_{n \geqslant 1} \text{ décroissante}}$

La suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante et minorée (par 0) donc $\boxed{(\gamma_n)_{n \geqslant 1} \text{ converge vers un réel } \ell}$

c. Démontrer que, lorsque n tend vers $+\infty$: $\quad \gamma_{n+1} - \gamma_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.
Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$?
Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question précédente.

On a : $\quad \gamma_{n+1} - \gamma_n = \dfrac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Or, en 0 : $\quad \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u) \quad$ et $\quad \ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) \quad$ Aussi, avec $u = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$:

$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \boxed{\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}}$

Or, la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(-\dfrac{1}{2n^2}\right)$ est une série absolument convergente (car de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc on sait que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n \geqslant 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \text{ converge absolument}}$

Mais, c'est une série télescopique associée à la suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ et on sait que, dans ce cas, la nature de la série est la même que celle de la suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ donc on retrouve que $\boxed{(\gamma_n)_{n \geqslant 1} \text{ converge vers un réel } \ell}$

d. Montrer que $\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right) = \ell - 1$

On obtient facilement $\quad \gamma_n - \gamma_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n}{n-1} \quad$ (calcul analogue à celui de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ en substituant n par $n-1$)
La suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ donc la série télescopique $\sum\limits_{n \geqslant 2} (\gamma_n - \gamma_{n-1})$ converge également et :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\gamma_n - \gamma_{n-1}) = \lim_{n \to +\infty} \gamma_n - \gamma_1 = \ell - (H_1 - \ln 1) = \ell - (1 - 0) \text{ soit } \boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right) = \ell - 1}$$