Le 20/11/2024 | Lycée Paul Constans | Classe PT

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

Durée 4h - Calculatrice non autorisée - Les trois problèmes sont indépendants
Merci d'utiliser des copies différentes pour chacun des problèmes

APPLICATION DIRECTE DU COURS — *Durée conseillée : 30 min*

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $\quad u_n = \dfrac{1}{e^{2n}}\dbinom{2n}{n}$

2. *Un contre-exemple*

a. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mais qu'elle ne converge pas absolument.

b. Démontrer que le terme général du produit de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec elle même est

$w_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$ *On pourra considérer que le terme d'indice $n=0$ de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est 0*

c. Justifier que, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\sqrt{k}\sqrt{n-k} \leqslant n$. En déduire $\sum w_n$ diverge grossièrement.

d. En déduire un contre-exemple pour l'un des résultats de cours (expliquer)

PROBLÈME N° 1 — *Un ensemble de matrices - oral maths II 2023* — *Durée conseillée : 45 min*

Soit, pour un réel a fixé, $\quad \mathrm{A}(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère $\quad \mathscr{A} = \{\mathrm{A}(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

1. $\mathscr{A}$ est-il un sev de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$?

2. Prouver que $\mathscr{A}$ est stable par le produit matriciel.

3. Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que $\mathrm{A}(a)$ ne soit pas inversible.

4. Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que $\mathrm{A}(a)$ soit la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

5. On choisit $a_0 \neq 0$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{A}(a_0)$ soit la matrice d'un projecteur.
Justifier que $\quad \mathrm{C} = \mathrm{I}_3 - \mathrm{B} \quad$ est aussi la matrice d'un projecteur. Vérifier que $\mathrm{BC} = \mathrm{CB} = 0$.
Que vaut B^n pour $n \in \mathbb{N}$? Que vaut C^n pour $n \in \mathbb{N}$?

6. Trouver un réel λ (qu'on exprimera à l'aide de a) tel que $\mathrm{A}(a) = \mathrm{B} - \lambda\mathrm{C}$.

7. En déduire $[\mathrm{A}(a)]^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. La relation trouvée est-elle vraie pour $n = 0$ et $n = 1$

PROBLÈME N° 2 — *Résolutions d'équations différentielles* — *Durée conseillée : 45 min*

1. *Un problème de Cauchy du premier ordre*

a. Pour $x > 0$, établir à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1+\ln x}{x}$

b. Résoudre alors sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy $\begin{cases} xy' - y = \ln x \\ y(1) = 0 \end{cases}$

2. *Résolution d'une équation du second ordre à l'aide d'une solution homogène*

On considère l'équation $\quad (\mathrm{E}_1) : \ t^2y'' - 2y = 3t^2 \quad$ sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$

a. Déterminer toutes les solutions homogènes de type polynômiale. *On pourra utiliser le coefficient dominant*

b. En vérifiant que $[t \mapsto t^2]$ est une solution homogène, donner l'expression des solutions de (E_1)

PROBLÈME N° 3 *D'après un sujet Banque PT* *librement adapté* *Durée conseillée : 2h*

1. Question préliminaire :
Soit n_0 un entier naturel non nul, et f une fonction à valeurs positives, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant n_0 + 1$: $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$
(on accompagnera la réponse d'une illustration graphique)

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant n_0 + 1$: $\displaystyle\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$

2. On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien ($\ln e = 1$).
Pour $t \geqslant e$, on considère la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$

a. Après avoir justifié la dérivabilité de f sur $[e, +\infty[$, donner la valeur de $f'(t)$.

b. En déduire les variations de f sur $[e, +\infty[$.

c. Déterminer une primitive de f sur $[e, +\infty[$.

d. Si S_n la somme partielle d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} f(n)$, trouver des constantes réelles A et B telles que :

$$\mathrm{A} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{B} - \frac{1}{\ln n} \quad \text{pour } n \geqslant 4$$

e. Déterminer alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} f(n)$ et préciser un encadrement de sa somme.

3. Pour $t \geqslant e$, on considère désormais la fonction g définie par : $g(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)}$

a. Prouver que $[t \longmapsto t\ln t]$ est croissante sur $[e, +\infty[$. En déduire, la monotonie de g sur $[e, +\infty[$ sans calculer $g'(t)$

b. Déterminer une primitive de g sur $[e, +\infty[$

c. Si on note T_n la somme partielle d'ordre n de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} g(n)$, trouver une constante réelle C telle que :

$$\mathrm{T}_n \geqslant \mathrm{C} + \ln(\ln(n+1)) \quad \text{pour } n \geqslant 4$$

d. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} (-1)^n g(n)$ est convergente sans être absolument convergente.

4. On considère la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\gamma_n = \mathrm{H}_n - \ln n$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant 1 + \ln n$. En déduire que $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite bornée.

b. En utilisant la question a des préliminaire, montrer que (γ_n) est une suite monotone.
En déduire que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On notera ℓ sa limite.

c. Démontrer que, lorsque n tend vers $+\infty$: $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.
Que peut-on en déduire pour la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$?
Montrer que l'on peut ainsi retrouver le résultat de la question précédente.

d. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right) = \ell - 1$