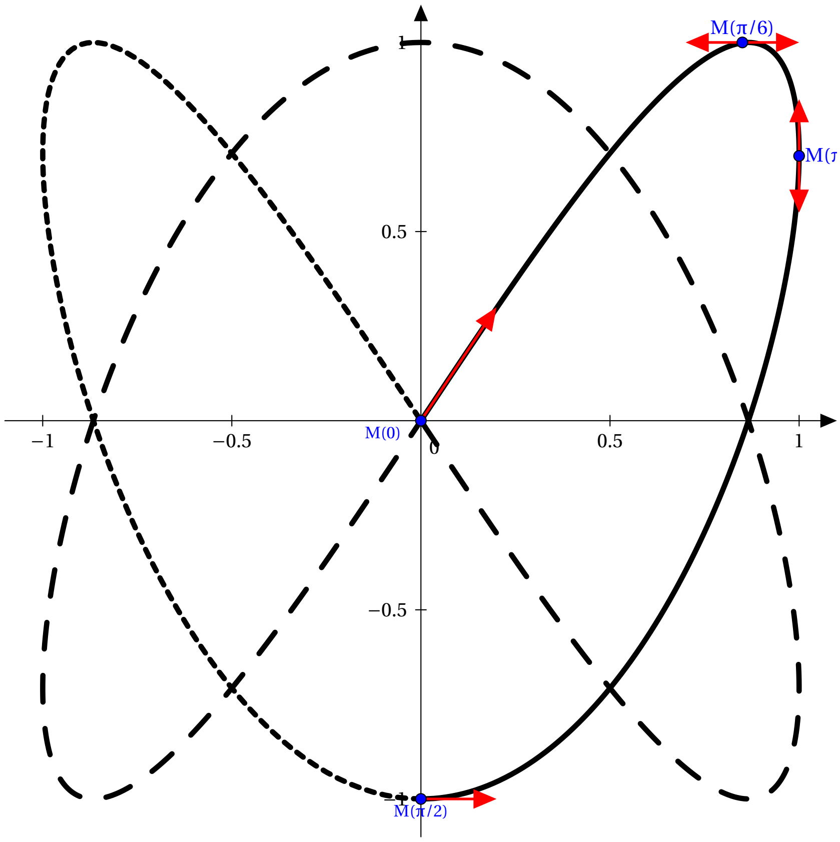
EXERCICE *Durée conseillée : 30 minutes*

On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \left[t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right]$ associé au tableau de variations suivant admis :

t	0		$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|
x	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/2$	$\searrow$	-1
$y'(t)$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0

1. Représenter la portion de courbe associée à ce tableau dans un repère orthonormée d'unité 5 cm en précisant graphiquement les tangente aux points remarquables. On donne $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\sqrt{3} \simeq 1,7$ et $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

Seul le tracé en trait plein est exigé à cette question.
Le tracé en trait pointillé court est obtenu par symétrie d'axe (Oy) (cf question suivante)
Le tracé en trait pointillé long est obtenu par une symétrie de centre O à partir des tracés précédents (cf question suivante)



2. Sachant que $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$, expliquer soigneusement comment obtenir, à partir du tracé précédent, le tracé de Γ sur la totalité de son domaine de définition. *L'une des symétrie sera entre les points* $M(\pi - t)$ *et* $M(t)$

Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$. On remarque que :
- les fonctions x et y sont 2π périodiques aussi on obtient la totalité de la courbe à partir du tracé sur un intervalle d'amplitude 2π
- on a $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ aussi les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'origine
- on a $\begin{cases} x(\pi - t) = \sin(2\pi - 2t) = \sin(-2t) = -\sin(2t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin(3\pi - 3t) = \sin(\pi - 3t) = \sin(3t) = y(t) \end{cases}$ aussi les points $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétrique par rapport à l'axe (Oy)

On commence par réaliser la symétrie d'axe (Oy) qui permet de construire la portion de courbe pour $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et on connaît alors la courbe sur $[0, \pi]$. On réalise ensuite la symétrie de centre O pour obtenir le tracé sur $[-\pi, 0]$. On connaît alors la courbe sur $[-\pi, \pi]$ qui est d'amplitude 2π ce qui assure, par périodicité, d'avoir la totalité du tracé de la courbe Γ.

$\boxed{\text{PROBLÈME N° 1}}$ *Durée conseillée : 1h*

Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}$, on définit sur E l'application u qui au polynôme P associe le polynôme $u(P) = \frac{1}{2}\left[P(X) + X^n P\left(\frac{1}{X}\right)\right]$.

Ainsi, par exemple si $n = 2$, $u(1+2X+3X^2) = \frac{1}{2}\left(1+2X+3X^2+X^2\left(1+\frac{2}{X}+\frac{3}{X^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+2X+3X^2+X^2+2X+3\right)$

Partie I : Dans cette partie, on suppose que $n = 3$.

1. On admet, pour l'instant, que u est un endomorphisme de E (cela sera prouvé dans le cas général dans la partie suivante).

Justifier que la matrice de u dans la base canonique de E est $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La base canonique de $E = \mathbb{C}_3[X]$ est $\mathcal{B}_{can} = (1, X, X^2, X^3)$.

$u(1) = \frac{1}{2}(1+X^3)$, $\quad u(X) = \frac{1}{2}(X+X^2)$,

$u(X^2) = \frac{1}{2}(X^2+X)$ $\quad$ et $\quad u(X^3) = \frac{1}{2}(1+X^3)$

Aussi : $\boxed{A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

2. Vérifier, à l'aide de cette matrice, que u est un projecteur de E.

Pour vérifier que l'endomorphisme u est un projecteur, il s'agit de vérifier que $u \circ u = u$ autrement dit que matriciellement $A^2 = A$

3. Donner une base et la dimension de $\text{Ker}\, u$ et de $\text{Im}\, u$

On note C_i la colonne i de A : comme $C_1 = C_4$ et $C_2 = C_3$, $\text{Im}\, A = \text{Vect}(C_1, C_2) \Rightarrow \text{Im}\, u = \text{Vect}(1+X^3, X+X^2)$.

Comme $1+X^3$ et $X+X^2$ sont non colinéaires, $\boxed{(1+X^3, X+X^2) \text{ est une base de } \text{Im}\, u \text{ et } \dim \text{Im}\, u = 2}$

Par le théorème du rang, on a $\dim \text{Ker}\, u = \dim \mathbb{C}_3[X] - \text{rg}(u) = 4 - 2 = 2$. Or : $1 - X^3 \in \text{Ker}\, u$ et $X - X^2 \in \text{Ker}\, u$ et ces vecteurs sont non colinéaires donc $\boxed{(1-X^3, X-X^2) \text{ est une base de } \text{Ker}\, u \text{ et } \dim \text{Ker}\, u = 2}$

4. En déduire une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale avec uniquement des 1 et des 0 sur la diagonale.

Comme u est un projecteur de E : $\quad E = \text{Ker}\, u \oplus \text{Im}\, u \quad$ et $\quad \text{Im}\, u = \text{Ker}\,(u - id_E)$

Par suite, $\boxed{\mathcal{B} = \left(1-X^3, X-X^2, 1+X^3, X+X^2\right)} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de E obtenue en réunissant une base de $\text{Ker}\, u$ et une base de $\text{Im}\, u$. On sait que : $u(P_1) = 0 = u(P_2)$ puisque P_1 et P_2 sont dans $\text{Ker}\, u$

$u(P_3) = P_3$, $u(P_4) = P_4$ puisque P_3 et P_4 sont dans $\text{Im}\, u = \text{Ker}\,(u - id_E)$.

Aussi, par définition : $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(0, 0, 1, 1)}$

5. Préciser les matrices de passage entre $\mathcal{B}$ et la base canonique.

On a : $\boxed{P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}}}$

De même : $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(1, X, X^2, X^3)$

car : $P_1 + P_3 = 2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_3)$ $\quad$ et $\quad P_2 + P_4 = 2X \Rightarrow X = \frac{1}{2}(P_2 + P_4)$

puis : $X^2 = P_4 - X = \frac{1}{2}(P_4 - P_2)$ $\quad$ et $\quad X^3 = P_3 - 1 = \frac{1}{2}(P_3 - P_1)$

soit $\boxed{P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Partie II : On revient désormais dans le cas général où $E = \mathbb{C}_n[X]$ avec n entier naturel quelconque.
Dans cette partie, il est explicitement demandée de ne pas utiliser une matrice de u !

6. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $u(X^k)$ et montrer que $u(X^k) \in E$.

$\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\boxed{u(X^k) = \frac{1}{2}\left(X^k + X^{n-k}\right)}$ Or, X^k et X^{n-k} sont deux vecteurs de E (car $0 \leqslant k \leqslant n \Leftrightarrow 0 \leqslant n-k \leqslant n$)

de sorte que $\boxed{u(X^k) \in E}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de E

7. Prouver que u est un endomorphisme de E.

- On vérifie la linéarité de u : $\forall (P,Q) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{C}$,

$$u(\alpha P + Q) = \frac{1}{2}\left[\alpha P(X) + Q(X) + X^2\left(\alpha P\left(\frac{1}{X}\right) + Q\left(\frac{1}{X}\right)\right)\right]$$

$$= \alpha \times \frac{1}{2}\left[P(X) + X^n P\left(\frac{1}{X}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[Q(X) + X^n Q\left(\frac{1}{X}\right)\right] = \alpha u(P) + u(Q)$$ et donc u est linéaire

- On vérifie que : $\forall P \in E,\ u(P) \in E$

On sait que $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E aussi : $\forall P \in E, \exists (\alpha_k)_{0\leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$, $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$. Par linéarité de u, on a :

$u(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u(X^k)$ et donc $u(P) \in E$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\left(u(X^k)\right)_{0\leqslant k \leqslant n}$ tous dans E d'après a)

u est donc bien un endomorphisme de E soit $\boxed{u \in \mathscr{L}(E)}$

8. Justifier que u est un projecteur de E en calculant $u \circ u(P)$ pour $P \in E$. Que dire de Im u et Ker u ?

On sait déjà $u \in \mathscr{L}(E)$. On vérifie que $u \circ u = u$ pour vérifier que $\boxed{u \text{ est bien un projecteur de E}}$

Méthode 1 : On vérifie que $\forall P \in E,\ u^2(P) = u(P)$

$\forall P \in E,\ u^2(P)(X) = u\big(u(P)\big)(X) = \frac{1}{2}\left[u(P)(X) + X^n u(P)\left(\tfrac{1}{X}\right)\right]$ Mais : $u(P)\left(\tfrac{1}{X}\right) = \frac{1}{2}\left(P(\tfrac{1}{X}) + \left(\tfrac{1}{X}\right)^n P(X)\right)$ d'où

$X^n u(P)\left(\tfrac{1}{X}\right) = \frac{1}{2}\left(X^n P\left(\tfrac{1}{X}\right) + P(X)\right) = u(P)(X)$. Ainsi : $u^2(P)(X) = \frac{1}{2}\left[u(P)(X) + u(P)(X)\right] = u(P)(X)$

Méthode 2 : Comme u est linéaire, il suffit de le vérifier sur la base $(X^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de E soit : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u^2(X^k) = u(X^k)$

En effet, la linéarité entraîne que l'égalité sera vraie pour tout $P \in \mathrm{Vect}\big((X^k)_{k\in[\![0,n]\!]}\big) = E$ soit $\forall P \in E,\ u^2(P) = u(P)$

Or, on sait : $u(X^k) = \frac{1}{2}(X^k + X^{n-k})$ donc, par linéarité :

$$u^2(X^k) = \frac{1}{2}\big(u(X^k) + u(X^{n-k})\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(X^k + X^{n-k}) + \frac{1}{2}(X^{n-k} + \underbrace{X^{n-(n-k)}}_{=X^k})\right) = \frac{1}{2}(X^k + X^{n-k}) = u(X^k)$$

Dés lors, on sait que Im u et Ker u sont supplémentaires soit $\boxed{\mathrm{Im}\ u \oplus \mathrm{Ker}\ u = E}$

9. On appelle s est la symétrie par rapport à Im u parallèlement à Ker u. Déterminer l'expression de $s(P)$ pour $P \in E$.

On rappelle le lien entre projecteur p sur F parallèlement à G et symétrie s par rapport à F parallèlement à G :
si $E = F \oplus G$ et $x = x_F + x_G$ où $(x_F, x_G) \in F \times G$ alors $p(x) = x_F$ et $s(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = 2p(x) - id(x)$ soit $s = 2p - id$

D'après le cours, on sait que : $s = 2u - id$ autrement dit : $s(P) = 2u(P) - P = P(X) + X^n P\left(\frac{1}{X}\right) - P(X) = \boxed{X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = s(P)}$

Dés lors, $s(1) = X^n,\ s(X) = X^{n-1}, \ldots, s(X^n) = 1$ donc $\boxed{\text{la matrice de } s \text{ dans la base canonique est } \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}$

PROBLÈME N° 2 *D'après un des problèmes du sujet CCP TSI de 2017. Durée conseillée : 1h30 maximum*

On considère les deux fonctions f et g de la variable réelle t définies par :

$$f(t)=\frac{t^2}{1-t^2} \qquad \text{et} \qquad g(t)=\frac{t^3}{1-t^2}$$

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le point $\mathrm{M}(t)$ de coordonnées $\big(f(t);g(t)\big)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée décrite par le point $\mathrm{M}(t)$.

Partie I - Deux fonctions

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $[t\mapsto \mathrm{M}(t)]$ et préciser le point $\mathrm{M}(\sqrt{3})$.

$\mathrm{M}(t)$ existe $\Leftrightarrow t^2-1\neq 0 \Leftrightarrow t\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ aussi $\boxed{[t\mapsto \mathrm{M}(t)] \text{ est définie sur } \mathbb{R}-\{-1,1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[}$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{3}{1-3}=-\dfrac{3}{2}=-1{,}5$ et $g(\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{1-3}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ d'où $\boxed{\mathrm{M}(\sqrt{3}) \text{ a pour coordonnées } \left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$

2. Étudier la parité des fonctions f et g. Que peut-on en déduire pour le point $\mathrm{M}(-t)$ par rapport au point $\mathrm{M}(t)$?

f et g sont définies sur le domaine $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ qui est bien symétrique par rapport à 0 et il est clair que :
$\forall t\in\mathbb{R}-\{-1,1\},\quad f(-t)=f(t)$ et $g(-t)=-g(t)$ de sorte que $\boxed{f \text{ est paire et } g \text{ est impaire}}$
Les points $\mathrm{M}(-t)$ et $\mathrm{M}(t)$ ont la même abscisse et des ordonnées opposés donc

$$\boxed{\mathrm{M}(-t) \text{ et } \mathrm{M}(t) \text{ sont symétriques par rapport à l'axe } \mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})}$$

3. Donner des équivalents des fonctions f et g au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de 1.

On a : $f(t)\sim_{+\infty}\dfrac{t^2}{-t^2}\Rightarrow\boxed{f(t)\sim_{+\infty}-1}$ et $g(t)\sim_{+\infty}\dfrac{t^3}{-t^2}\Rightarrow\boxed{g(t)\sim_{+\infty}-t}$ Au voisinage de 1, on pose $t=1+h$:

$f(t)=f(1+h)=\dfrac{(1+h)^2}{-h(2+h)}\Rightarrow\boxed{f(1+h)\sim_{h\to 0}-\dfrac{1}{2h}\Rightarrow f(t)\sim_{t\to 1}-\dfrac{1}{2(t-1)}}$

$g(t)=g(1+h)=\dfrac{(1+h)^3}{-h(2+h)}\Rightarrow\boxed{g(1+h)\sim_{h\to 0}-\dfrac{1}{2h}\Rightarrow g(t)\sim_{t\to 1}-\dfrac{1}{2(t-1)}}$

4. Justifier que les fonctions f et g sont de classe C^∞ sur $\mathrm{D}=[0,1[\cup]1,+\infty[$ et que, sur D, $f'(t)$ a les zéros et le signe de t alors que $g'(t)$ a les zéros et le signe de $t^2(3-t^2)$.

f et g sont des fonctions rationnelles aussi elles sont C^∞ sur leurs domaines de définition et donc, en particulier, sur D qui est inclus dans ce domaine. Ainsi, $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont bien } \mathrm{C}^\infty \text{ sur D}}$. De plus :

$f'(t)=\dfrac{2t(1-t^2)-(-2t)t^2}{(1-t^2)^2}=\dfrac{2t}{(1-t^2)^2}$ et, comme $\dfrac{2}{(1-t^2)^2}>0$, $\boxed{f'(t) \text{ a bien les zéros et le signe de } t \text{ sur D}}$

$g'(t)=\dfrac{3t^2(1-t^2)-(-2t)t^3}{(1-t^2)^2}=\dfrac{3t^2-t^4}{(1-t^2)^2}=\dfrac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$ et, comme $\dfrac{1}{(1-t^2)^2}>0$, $\boxed{g'(t) \text{ a les zéros et le signe de } t^2(3-t^2) \text{ sur D}}$

5. Dresser et justifier le tableau commun des variations de f et g sur le domaine D dans lequel figurera les limites et les valeurs extrêmes.

Avec la question précédente, on peut conclure que, sur D : $f'(t)$ s'annule en $t=0$ et $f'(t)>0$ sinon
et : $g'(t)$ s'annule en $t=0$ et $t=\sqrt{3}>1$ et $t^2(3-t^2)=\underbrace{t^2(\sqrt{3}+t)}_{\geqslant 0}(\sqrt{3}-t)$ aussi : $g'(t)\leqslant 0\Leftrightarrow t\geqslant\sqrt{3}$

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	‖	$+$	$\vert$	$+$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-3/2$	↗	-1
g	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-3\sqrt{3}/2$	↘	$-\infty$
$g'(t)$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Les équivalents déterminés en 3) donnent le calcul des limites :
$f(1+h)\sim_0-\dfrac{1}{2h}$ d'où $\lim\limits_{t\to 1^-}f(t)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to 1^+}f(t)=-\infty$
$g(1+h)\sim_0-\dfrac{1}{2h}$ d'où $\lim\limits_{t\to 1^-}g(t)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to 1^+}g(t)=-\infty$
$f(t)\sim_{+\infty}-1\xrightarrow[t\to+\infty]{}-1$ et $g(t)\sim_{+\infty}-t\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\infty$
Les valeurs $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$ ont été calculées en 1.
Enfin, il est clair que $f(0)=g(0)=0$

6. Y-a-t-il des points stationnaires ? des branches infinies à étudier ? *L'étude éventuelle à faire n'est pas exigée à cette question*

On repère un point stationnaire pour $t=0$ et il y a des branches infinies en $1-$, $1+$ et en $+\infty$

Partie II - Tangentes à l'origine et en $\mathrm{M}(\sqrt{3})$

7. Déterminer des développements limités des fonctions f et g en 0 à l'ordre 5.

$f(t) = t^2 \times \dfrac{1}{1-t^2} = t^2\big(1+t^2+o(t^3)\big) = t^2+t^4+o(t^5)$ soit $\boxed{f(t) = t^2+t^4+o(t^5)}$

Un $\mathrm{DL}_3(0)$ *de* $\frac{1}{1-t^2}$ *suffit et, par parité, le* DL_3 *s'obtient avec le* $\mathrm{DL}_2(0)$ *en posant* $u = t^2$ *dans un* $\mathrm{DL}_1(0)$ *de* $\frac{1}{1-u} = 1+u+o(u)$

$g(t) = t^3 \times \dfrac{1}{1-t^2} = t^3\big(1+t^2+o(t^2)\big) = t^3+t^5+o(t^5)$ soit $\boxed{g(t) = t^3+t^5+o(t^5)}$ *Raisonnement analogue*

8. Sans calculer les dérivées successives de f et g, expliciter les vecteurs $\begin{pmatrix} f^{(k)}(0) \\ g^{(k)}(0)\end{pmatrix}$ pour $k \in [\![2,5]\!]$.

Le théorème utilisé sera mentionné. On vérifiera, en particulier, que $f''(0) = 2$ et $g''(0) = 0$

On a :

$\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix} + t^4\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} + t^5\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^5) \\ o(t^5)\end{pmatrix}$ et en identifiant avec $\boxed{\text{la formule de Taylor-Young}}$, on a :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} f''(0) \\ g''(0)\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f''(0) = 2 \text{ et } g''(0) = 0}$ et, de même : $\boxed{\begin{pmatrix} f^{(3)}(0) \\ g^{(3)}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3!\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f^{(4)}(0) \\ g^{(4)}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4! \\ 0\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} f^{(5)}(0) \\ g^{(5)}(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5!\end{pmatrix}}$

9. En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ en l'origine du repère.
Quel est la nature de l'origine en tant que point de la courbe $\mathscr{C}$?

On sait que la tangente en $\mathrm{M}(0) = \mathrm{O}$ est dirigée par le premier vecteur dérivée $\begin{pmatrix} f^{(p)}(0) \\ g^{(p)}(0)\end{pmatrix}$ non nul avec $p \geqslant 1$.

Ici : $\boxed{p = 2}$ et $\boxed{\text{la tangente à } \mathscr{C} \text{ en l'origine est dirigée par le vecteur } \vec{\imath}}$

Pour préciser la nature du point, on cherche le vecteur dérivé $\begin{pmatrix} f^{(q)}(0) \\ g^{(q)}(0)\end{pmatrix}$ suivant qui n'est pas colinéaire à $\begin{pmatrix} f^{(p)}(0) \\ g^{(p)}(0)\end{pmatrix}$.

Ici : $\boxed{q = 3}$ et on peut conclure que $\boxed{\mathrm{O} = \mathrm{M}(0) \text{ est un point de rebroussement de première espèce.}}$

10. Que dire de la tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathrm{M}(\sqrt{3})$?

Le point $\mathrm{M}(\sqrt{3})$ est régulier et, d'après le tableau commun des variations, $\boxed{\text{la tangente en } \mathrm{M}(\sqrt{3}) \text{ est horizontale}}$ car $\begin{pmatrix} f'(\sqrt{3}) \\ g'(\sqrt{3})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$

Partie III - Asymptotes

11. Que conclure pour la courbe $\mathscr{C}$ pour t au voisinage de $+\infty$? Préciser l'allure localement pour t au voisinage de $+\infty$.

Comme $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -1^-$ et $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$, on peut conclure que $\boxed{\mathscr{C} \text{ possède une asymptote verticale d'équation } x = -1}$ et que $\boxed{\text{la courbe reste à gauche de l'asymptote (car limite en } -1^- \text{ donc } x(t) < -1\text{) et en bas (ordonnée en } -\infty)}$ (voir tracé final)

12. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote oblique dont on précisera une équation.

On étudie la branche infinie en $t = 1$:

$\dfrac{g(1+h)}{f(1+h)} \sim_{h\to0} \dfrac{-\frac{1}{2h}}{-\frac{1}{2h}} \sim_{h\to0} 1$ puis : $g(t) - f(t) = \dfrac{t^3-t^2}{1-t^2} = \dfrac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t)} = \dfrac{-t^2}{1+t} \sim_{t\to1} -\dfrac{1}{2}$

On conclut que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x - \frac{1}{2} \text{ est une asymptote oblique de la courbe } \mathscr{C}}$

13. On note $\mathscr{D}$ la droite du plan d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{N}(t)$ le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse $f(t)$.

On note aussi $y_{\mathrm{M}(t)}$ et $y_{\mathrm{N}(t)}$ les ordonnées respectives des points $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{N}(t)$.

Donner une expression factorisée de $y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)}$ pour en déduire le signe au voisinage de $t = 1$.

Le point $\mathrm{M}(t)$ a pour coordonnées $\Big(f(t), g(t)\Big)$ donc $y_{\mathrm{M}(t)} = g(t)$

Le point $\mathrm{N}(t)$ a pour abscisse $f(t)$ et il est situé sur la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ aussi $y_{\mathrm{N}(t)} = f(t) - \dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)} = g(t) - f(t) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-t^2}{1+t} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-2t^2+1+t}{2(1+t)}$ en utilisant $g(t) - f(t) = \dfrac{-t^2}{1+t}$ calculé en 12

$t_1 = 1$ est une racine de $-2t^2 + t + 1$ et le produit des racines vaut $\dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2} = t_1 t_2 = t_2$ aussi

$-2t^2 + t + 1 = -2(t-1)(1+\frac{1}{2}) = (1-t)(2t+1)$ et l'expression factorisée est : $\boxed{y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)} = \dfrac{(1-t)(2t+1)}{2(t+1)}}$

Pour préciser le signe de cette expression au voisinage de $t = 1$, il suffit de prendre un équivalent :

$y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)} \sim_{t\to 1} \dfrac{3(1-t)}{4}$ aussi $\boxed{y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)} \text{ a le signe de } 1-t \text{ au voisinage de } 1}$

14. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote oblique (éventuellement à l'aide d'un schéma).

Le signe de $y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)}$ permet de positionner la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'asymptote oblique $\mathscr{D}$. Par exemple, s'il est positif, le point de $\mathscr{C}$ est au dessus du point de $\mathscr{D}$ de même abscisse donc la courbe est au dessus de l'asymptote.

Finalement, on peut conclure que, $\boxed{\text{lorsque } t \to 1^-, \text{ la courbe est au dessus de l'asymptote}}$ (car $y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)} > 0$) et, $\boxed{\text{lorsque } t \to 1^+, \text{ la courbe est en dessous de l'asymptote}}$.

Partie IV - Tracé de la courbe

15. En tenant compte des informations issues des questions précédentes et en utilisant la feuille de papier millimétré fournie par le sujet, tracer la courbe $\mathscr{C}_1 = \{\mathrm{M}(t) | t \in [0,1[\cup]1,+\infty[\}$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

On utilisera l'échelle suivante : 2 cm pour 1 unité et on considéra que $\sqrt{3} \simeq 1,73$.

On fera apparaître :

- la droite $\mathscr{D}$
- les vecteurs tangents à l'origine du repère et au point $\mathrm{M}(\sqrt{3})$
- la droite d'équation $x = -1$

16. Comment obtenir le tracé de toute la courbe $\mathscr{C}$ sans étude supplémentaire ?

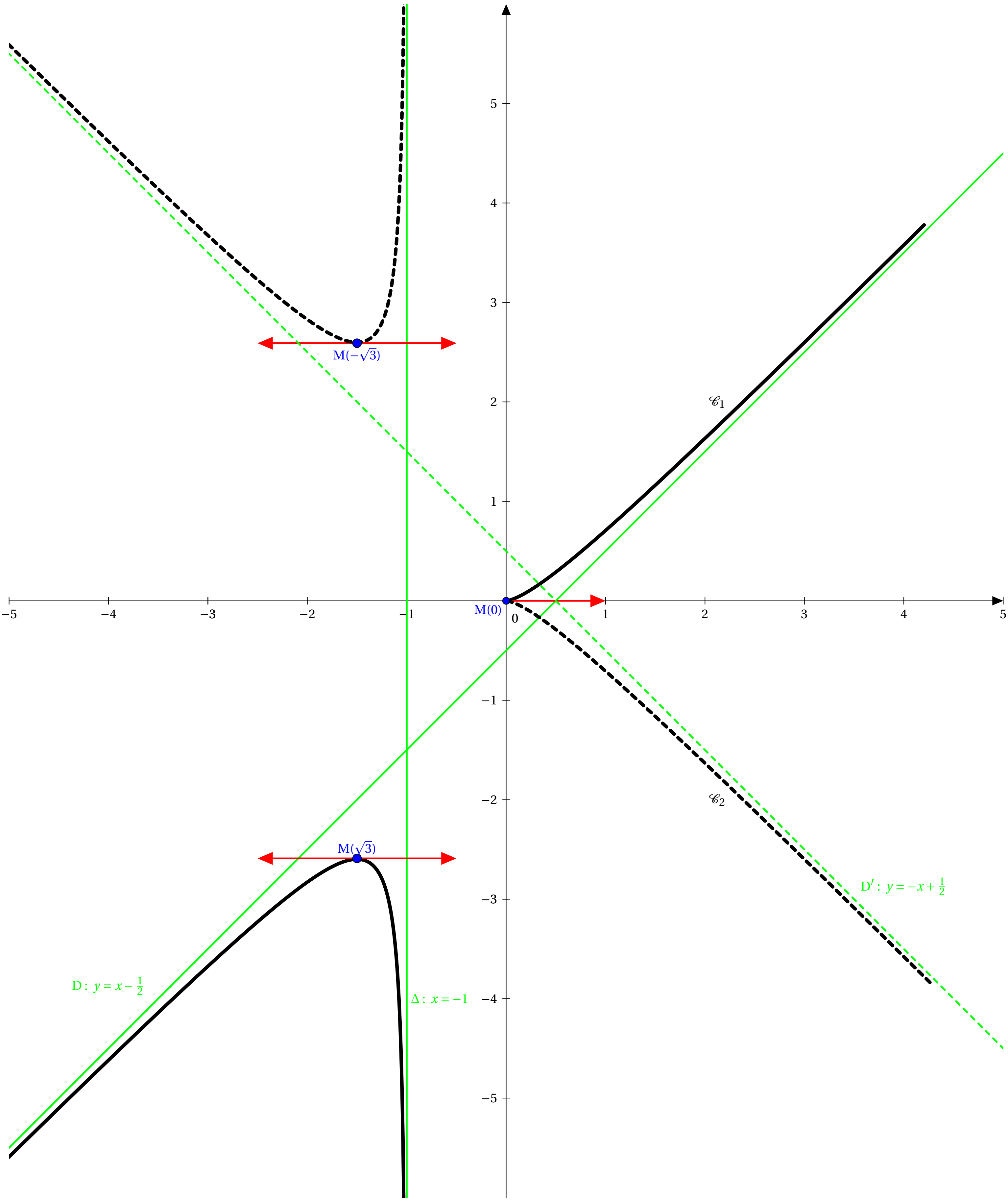
Compléter le tracé précédent en pointillé pour représenter toute la courbe $\mathscr{C}$.

En exploitant la symétrie issue de la question 2, on obtient la courbe $\mathscr{C}_2 = \{\mathrm{M}(t) | t \in]-\infty,-1[\cup]-1,0]\}$ par symétrie de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe $\mathrm{O} + \mathrm{Vect}(\vec{\imath})$. La courbe $\mathscr{C}$ est la réunion des deux courbes : $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.

Pour le tracé de la question 15 : on évalue $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ pour placer la point $\mathrm{M}(\sqrt{3})$ or

$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \simeq \dfrac{-3\times 1,73}{2} \simeq -\dfrac{-(3+3\times 0,7+3\times 0,03)}{2} \simeq \dfrac{-(3+2,1+0,09)}{2} \simeq \dfrac{-5,19}{2} \simeq -2,6$

Courbe du problème n°2 (Partie IV)



Remarques suite à la correction

Vous réalisez une performance honorable et assez homogène aussi j'ai pu noter sur 20 avec une moyenne à 10,24 et la médiane à 10,25. Les notes s'étalant de 4,6 à 14.8 pour un écart-type de 2.6.
Il y a 2 très bonnes copies qui creusent l'écart (14.8,14.1) sur un second groupe de 2 bonnes copies (12,2 et 13.4). Le groupe suivant de 6 copies (9.7<notes<11.3) réalisent une performance honorable mais encore perfectible. On trouve ensuite 4 copies qui loupent de peu la moyenne (8.3<notes<8.8) et sont encourageantes. Pour les 2 copies les plus faibles, il n'y a rien d'affolant : il s'agit souvent de problème de méthodes, d'efficacité, de rythme parfois de cours...mais rien qui ne peut être surmontable et qui ne va pas progresser à force de travail.

Les stylos effaçables sont à bannir : ils seront interdit aux concours aussi vous devez prendre l'habitude d'écrire avec un stylo bic.

Mettez en évidence vos réponses (encadrement avec un surligneur vert ou bleu) et n'hésitez pas à aérer vos copies en laissant un peu d'espace entre les questions. Si vous êtes amené à barrer une partie de raisonnement, barrer avec une règle plutôt que de raturer. Ce qui est barré ou écrit au crayon à papier ne sera normalement pas pris en compte dans l'évaluation de votre copie.

EXERCICE

Le tracé de courbe (question 1) est, en général, bien réussi :
- 3 étudiants ne respectent pas l'unité graphique donné par le sujet (1 unité pour 5cm)
- quelques étudiants ne nomment pas les points qu'ils placent
- quelques étudiants ont fait des erreurs sur les tangentes, en particulier celle en $M(\frac{\pi}{2})$

La question n°2 a été beaucoup moins bien réussie. L'étude complète n'est pas à faire : elle serait une perte de temps et d'énergie! Ici, il fallait seulement repérer suffisamment de symétrie pour obtenir un tracé complet à partir du tracé sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ de la question n°1. Attention, le sujet imposé d'utiliser une symétrie entre $M(\pi-t)$ et $M(t)$! Il fallait être rigoureux dans le calcul :
$\sin\big(2(\pi-t)\big)=\sin(2\pi-2t)=_{\text{par périodicité}}\sin(-2t)=-\sin(2t)$ mais $\sin\big(3(\pi-t)\big)=\sin(3\pi-3t)=_{\text{par périodicité}}\sin(\pi-3t)=\sin(3t)$
car $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ pour $\theta\in\mathbb{R}$

Outre cette symétrie, il fallait raisonnablement exploiter la 2π périodicité et la parité!
Le sujet réclamait alors une « explication soigneuse » or c'est bien souvent très léger dans vos copies... Je vous renvoie au corrigé pour la construction attendue et soigneusement rédigée.
Enfin, certains étudiants ont repéré une symétrie entre $M(t+\pi)$ et $M(t)$:
$x(t+\pi)=\sin(2t+2\pi)=x(t)$ et $y(t+\pi)=\sin(3t+3\pi)=\sin(3t+\pi)=-\sin(3t)=-y(t)$ d'où une symétrie d'axe (Ox)
Toutefois, les conclusions sur le domaine d'étude ont bien souvent été mal formulée. Ici, le point $M(t+\pi)$ est l'image de $M(t)$ donc, si on connaît la courbe sur $[a,b]$, on obtient le tracé sur $[a+\pi,b+\pi]$ par symétrie...
En pratique, on peut construire la courbe à partir de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:
1) en réalisant d'abord la symétrie de centre 0 entre $M(-t)$ et $M(t)$ qui permet d'obtenir la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ et donc d'avoir le tracé sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
2) d'appliquer ensuite la symétrie d'axe (Ox) entre $M(t+\pi)$ et $M(t)$ qui construit la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi,\frac{\pi}{2}+\pi\right]=\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ et, in fine, sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$
3) l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ étant d'amplitude 2π, on a obtenu toute la courbe Γ à cause de la périodicité
Toutefois, bien que juste, cette construction n'était pas celle attendue par le sujet puisque celui-ci imposé l'utilisation d'une symétrie entre $M(\pi-t)$ et $M(t)$!

PROBLÈME N$^{\text{o}}$ 1

Partie I : questions 1 à 3 N'oubliez jamais que les questions ont pour objectif de vérifier votre connaissance et votre maîtrise du cours!

Aussi, si on vous demande de vérifier qu'une matrice donnée est la matrice d'une application linéaire (cf I.1), il s'agit surtout de mettre en avant la définition d'une matrice dans une base...

En I.2, ils seraient bien de ne plus confondre condition nécessaire (il faut) et condition suffisante (il suffit). On peut montrer que u est un projecteur à l'aide de sa matrice car on sait déjà que u est un endomorphisme (souvent oublié) et il suffit alors de vérifier $A^2=A$.

Écrire « Si u est un projecteur, alors (il faut) $A^2=A$ »au démarrage, c'est annoncer que vous vérifiez une condition nécessaire alors que c'est la condition suffisante qui permet de conclure...En effet, cette condition est nécessaire et suffisante :

si u est un endomorphisme de matrice A, u est un projecteur si et seulement si (càd $\Leftrightarrow$) $A^2=A$

En I.3, encore beaucoup trop de confusion entre Im A et Im u! Je rappelle qu'on utilise Im A et ker A (qui sont des sev de l'espace des coordonnées $\mathbb{C}^4$) pour déduire Im u et ker u (qui sont des sev de l'espace des vecteurs $\mathbb{C}_3[X]$) en traduisant les coordonnées en vecteurs via la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$: $\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}\big((1,0,0,1),(0,1,1,0)\big)$ donne $\operatorname{Im} u=\operatorname{Vect}\big(1+X,X+X^2\big)$

Attention, vos raisonnements sont souvent incomplets car vous oubliez de donner des arguments d'indépendance linéaire :

$\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}(C_1,C_2)$ donc $\operatorname{rg}(A)=2$ car C_1 et C_2 sont non colinéaires

le théorème du rang donne alors $\dim\ker A=2$ et on trouve deux vecteurs de $\ker A$: $(1,0,0,-1)$ (car $C_1-C_4=0\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

et $(0,1,-1,0)$ (avec $C_2-C_3=0$) qui sont linéairement indépendants de sorte qu' ils forment une base de $\ker A$ (famille libre de l'espace de cardinal égal à la dimension de l'espace)

Partie I : questions 4 et 5 Peu de réussite sur ces questions pourtant classiques...La réponse ci-après assure tous les points de Q4 en utilisant uniquement le cours et la dimension de Im u et ker u que vous aviez tous : on peut donc faire la question 4 même si on n'a pas réussit la Q3 en totalité...

« Comme u est un projecteur, $E = \text{Im } u \oplus \ker u$ et $\text{Im } u = \ker(u - id)$. On obtient une base de E en concaténant une base (P_1, P_2) de Im u avec une base (P_3, P_4) de $\ker u$. Dans la base $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, la matrice de u est alors diag(1, 1, 0, 0) car $\begin{cases} u(P_1) = P_1,\ u(P_2) = P_2 \\ u(P_3) = 0 = u(P_4) \end{cases}$ »

Enfin, pour Q5, là-encore, il s'agit de tester la notion de matrice de passage : on peut obtenir une partie des points en rappelant la définition « Si $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ et $\mathscr{B}_{can} = (1, X, X^2, X^3)$ alors $P_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}} = \text{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ où on entre en colonne les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ exprimées dans $\mathscr{B}_{can}$ et $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_{can}} = P^{-1}_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}}$ » La formule de changement de base $A' = P^{-1}AP$ est hors sujet dans Q5 !

Partie II : questions 6 et 7 Pensez à bien définir vos notions de cours : dans « endomorphisme », il y a « morphisme » et « endo » et il faut clairement expliciter ce qu'il faut vérifier pour chacune des propriétés. Attention, ici, $E = \mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel d'où des scalaires dans $\mathbb{C}$ pour la linéarité. Pour la partie « endo », vous pouvez le formuler de plusieurs façon (Im $u \subset E$ ou $u(E) \subset E$) mais cela revient à vérifier que : $\forall P \in E,\ u(P) \in E$. La question 7 l'a vérifiée sur les polynômes du type X^k où $k \in [\![0, n]\!]$ et c'est grâce à la linéarité que c'est vrai pour un polynôme P quelconque.

Partie II : questions 8 et 9 Il fallait donc vérifier $u \circ u(P) = u(P)$ puisqu'on sait déjà $u \in \mathscr{L}(E)$ avec Q7. Pour cela, il fallait bien comprendre la définition de u ce qui s'est avérée difficile pour beaucoup ! En effet, pour calculer $u\big(u(P)\big) = \frac{1}{2}\Big(u(P)(X) + X^n u(P)(\frac{1}{X})\Big)$, il y a souvent des confusions : $u(P)(\frac{1}{X}) \neq \frac{1}{u(P)(X)}$ mais il s'agit de substituer l'indéterminé X par $\frac{1}{X}$ dans $u(P) = \frac{1}{2}\big(P(X) + X^n P(\frac{1}{X})\big)$ soit : $u(P)(\frac{1}{X}) = \frac{1}{2}\left(P(\frac{1}{X}) + \left(\frac{1}{X}\right)^n P\left(\frac{1}{\frac{1}{X}}\right)\right)$ (souvent le $\left(\frac{1}{X}\right)^n$ est resté X^n dans vos copies... Je vous renvoie vers la correction pour le reste de cette vérification.

Il est regrettable de ne pas repérer la question de cours finale (où les points sont facilement gagnés) : u est un projecteur donc Ker u et Im u sont supplémentaires ! De plus, il faut apprendre à bien lire « les sous-entendu » des questions : si on demande de déduire quelque chose pour « Im u et $\ker u$ », c'est qu'on attend une propriété qui concerne les deux espaces en même temps.

La question 9 introduisait la symétrie associée à ce projecteur aussi la relation du cours liant les deux endomorphismes $s = 2u - id$ permettait facilement de répondre à la question. Je rappelle qu'il est important de savoir que ces relations existent et il faut surtout savoir retrouver la relation pour l'utiliser quand on en a besoin...

PROBLÈME N° 2

1. Attention à bien préciser vos notations : le correcteur n'a pas à deviner que $\mathscr{D}_f$ est le domaine de définition de f !
Quelques erreurs (que j'espère) d'attention : $t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$ (et pas seulement 1 !)

2. Lorsqu'on étudie la parité/imparité d'une application, on doit d'abord normalement vérifier que son domaine de définition est centré par rapport à 0. Personne ne l'a vérifié mais ça serait bien d'y penser à l'avenir...

3. Des confusions sur les symboles : $\sim$ n'est pas $=$ ni $\rightarrow$! Pas besoin de longs arguments : les équivalents d'expressions polynômiales en 0 et en $\pm\infty$ sont des acquis du cours (termes de plus haut/bas degré). Les équivalents en 1 ont posé plus de problème : il s'agit d'effectuer un changement de variables $h = t - 1$ pour ramener le problème en 0 (en vérifiant $h \to 0$ lorsque $t \to 1$! (voir le corrigé).

4. Il ne suffit pas de dire « f et g sont de classe C^∞ » car ici on vous demande de le justifier : il s'agit donc d'exploiter les théorèmes usuels et il y avait deux possibilités :
- soit vous voyez f et g comme des fonctions rationnelles et le cours dit qu'elles sont C^∞ sur leurs domaines de définition
- soit vous voyez f et g comme des quotients de deux fonctions polynômiales qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et alors il faut citer l'hypothèse du théorème sur le quotient à savoir « la fonction au dénominateur ne s'annule pas »

Le reste de la question est en général bien traitée mais, puisque le résultat est donné, il faut bien souligner l'argument qui permet de conclure sur le signe des dérivées (ici $(1 - t^2)^2 > 0$)

5. Les valeurs dans le tableau sont justifiées par les équivalents de Q3 et le signe des dérivées avec Q4 encore faut-il le préciser. Si vous n'aviez pas les équivalents en 1, vous pouviez quand même calculer la limite en utilisant le théorème usuel du quotient. De plus, il fallait détailler l'étude du signe et des zéros de $t^2(3 - t^2)$.

6. La branche infinie en $+\infty$ a souvent été oublié : ce n'est pas parce que son étude est simple qu'elle ne constitue pas aussi une branche infinie. On ne demande pas, dans cette question, d'être plus précis sur la nature du point ou des branches : cela viendra en son temps... Il est très maladroit de parler de M(1) (ou de M($+\infty$)) puisque ces points n'existent pas.

7. La difficulté était surtout de justifier le $o(t^5)$ dans $f(t)$ soit par un argument de parité soit en partant d'un DL_6 qu'on tronque.

8. Le DL vectoriel de $\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ est incontournable dans cette question. Attention $\Gamma(t)$ n'a pas de SENS : Γ est le nom de la courbe !

Bien souvent,il y a une grosse erreur de SENS car vous écrivez :
$\begin{pmatrix} f^{(k)}(0) \\ g^{(k)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^5) \\ o(t^5) \end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^5) \\ o(t^5) \end{pmatrix}$

Le sujet demandait ensuite de citer la formule de Taylor-Young qui permettait, en l'identifiant à ce DL, de calculer les dérivées successives (voir corrigé) et il précisait qu'il ne voulait pas de calcul de dérivée ! Bien souvent, vous oubliez que la formule de Taylor-Young induit la présence de factoriels qu'il fallait bien gérer pour identifier les vecteurs dérivés (voir corrigé).

9. En général, la question a été bien traitée sauf l'orthographe de "tangente" qui est très aléatoire et fluctuante... Précisez bien les valeurs de p et q pour justifier la nature du point et ne pas oublier de préciser le vecteur tangent.

10. Des confusions sur verticale/horizontale et aussi sur tangente/asymptote...Soyons sérieux !

11. Encore des confusions : vous mélangez asymptote verticale et branche parabolique et horizontale avec verticale…

L'asymptote doit être précisée par une équation (ici $x = -1$). La question demande de préciser « l'allure de la courbe »et cette formulation a été mal comprise par certains mais il faut vous habituer au formulation parfois maladroite des sujets. Pour préciser cette allure, vous pouvez l'expliquer avec des mots (voir correction), faire un schéma (du style fait en cours) ou même renvoyer à votre tracé final (question 15). Dans ce cas il faut clairement l'expliciter sur la copie « l'allure de la courbe a été précisée sur le tracé final » sinon le correcteur doit envisager que vous avez éludé la question.

12. La question laissait plus d'initiative : il s'agissait d'étudier l'autre branche infinie (celle au voisinage de 1) selon l'approche du cours et donc de tester ce savoir-faire. Bien sûr, pour obtenir un résultat cohérent avec la suite du problème, il faut être rigoureux dans le calcul des limites…

13. La formulation de la question a pu dérouter certains d'entre vous : il s'agissait de comparer les ordonnées d'un point $\mathrm{M}(t)$ de la courbe et d'un point $\mathrm{N}(t)$ de l'asymptote oblique pour une même abscisse. De cette façon, selon le signe $y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)}$, on pourra positionner la courbe par rapport à l'asymptote. Le terme « expression factorisée » semble inconnu pour beaucoup : il s'agit d'écrire l'expression sous la forme d'un produit (ou d'un quotient de produit) de termes. L'objectif est de pouvoir ensuite étudier le signe, éventuellement à l'aide d'un tableau de signes. Ici, puisqu'on demande une étude du signe localement, on peut utiliser un équivalent de $y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)}$.

14. Il s'agit d'interpréter géométriquement le résultat de la question précédente en terme de position des courbes l'une par rapport à l'autre. Là encore, on peut l'expliquer avec des mots (voir correction), faire un dessin (comme en cours) ou renvoyer au tracé final en le précisant sur la copie.

15. Ne pas rendre une courbe lorsqu'on étudie une courbe paramétrée, c'est maladroit! Il y a, en général, un nombre de point significatif sur le tracé. La meilleur façon de procéder est de construire sa courbe au fil de l'avancement des questions : on place les points particuliers avec les tangentes, les asymptotes au fur et à mesure qu'on les rencontre dans les questions…

Si une échelle est imposée, on doit la respecter. Ensuite, il est bon de laisser des traces de calculs expliquant vos approximations (Ici, évaluation de $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ à l'aide des données de l'énoncé).

16. Lorsqu'on complète le tracé par symétrie, on commence par placer les tangentes et asymptotes obtenues par symétrie!