Devoir surveillé n° 2 de mathématiques

Durée : 3h- La calculatrice n'est pas autorisée.
Le barème sera proportionnel à la durée conseillée.
Merci d'utiliser des copies différentes pour l'exercice et les problèmes

---

Exercice *Durée conseillée : 30 minutes*

On considère la courbe paramétrée Γ : $\left[t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right]$ associé au tableau de variations suivant admis :

t	0		$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|
x	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/2$	$\searrow$	-1
$y'(t)$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0

1. Représenter la portion de courbe associée à ce tableau dans un repère orthonormée d'unité 5 cm en précisant graphiquement les tangente aux points remarquables. On donne $\begin{pmatrix} x'(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\sqrt{3} \simeq 1,7$ et $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

2. Sachant que $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$, expliquer soigneusement comment obtenir, à partir du tracé précédent, le tracé de Γ sur la totalité de son domaine de définition. *L'une des symétrie sera entre les points* $M(\pi - t)$ *et* $M(t)$

Problème n° 1 *Durée conseillée : 1h*

Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}$, on définit sur E l'application u qui au polynôme P associe le polynôme $u(P) = \dfrac{1}{2}\left[P(X) + X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)\right]$.

Ainsi, par exemple si $n = 2$, $u(1+2X+3X^2) = \dfrac{1}{2}\left(1+2X+3X^2+X^2\left(1+\frac{2}{X}+\frac{3}{X^2}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(1+2X+3X^2+X^2+2X+3\right)$

<u>Partie I</u> : Dans cette partie, on suppose que $n = 3$.

1. On admet, pour l'instant, que u est un endomorphisme de E (cela sera prouvé dans le cas général dans la partie suivante).

Justifier que la matrice de u dans la base canonique de E est $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Vérifier, à l'aide de cette matrice, que u est un projecteur de E.

3. Donner une base et la dimension de $\operatorname{Ker} u$ et de $\operatorname{Im} u$

4. En déduire une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale avec uniquement des 1 et des 0 sur la diagonale.

5. Préciser les matrices de passage entre $\mathscr{B}$ et la base canonique.

<u>Partie II</u> : On revient désormais dans le cas général où $E = \mathbb{C}_n[X]$ avec n entier naturel quelconque.
Dans cette partie, il est explicitement demandée de <u>ne pas utiliser une matrice de u</u>!

6. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $u(X^k)$ et montrer que $u(X^k) \in E$.

7. Prouver que u est un endomorphisme de E.

8. Justifier que u est un projecteur de E en calculant $u \circ u(P)$ pour $P \in E$. Que dire de $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$?

9. On appelle s est la symétrie par rapport à $\operatorname{Im} u$ parallèlement à $\operatorname{Ker} u$. Déterminer l'expression de $s(P)$ pour $P \in E$.

PROBLÈME N° 2 *D'après un des problèmes du sujet CCP TSI de 2017. Durée conseillée : 1h30 maximum*

On considère les deux fonctions f et g de la variable réelle t définies par :

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}$$

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère le point $\mathrm{M}(t)$ de coordonnées $\Big(f(t); g(t)\Big)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée décrite par le point $\mathrm{M}(t)$.

Partie I - Deux fonctions

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $[t \mapsto \mathrm{M}(t)]$ et préciser le point $\mathrm{M}(\sqrt{3})$.

2. Étudier la parité des fonctions f et g. Que peut-on en déduire pour le point $\mathrm{M}(-t)$ par rapport au point $\mathrm{M}(t)$?

3. Donner des équivalents des fonctions f et g au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de 1.

4. Justifier que les fonctions f et g sont de classe C^∞ sur $\mathrm{D} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ et que, sur D, $f'(t)$ a les zéros et le signe de t alors que $g'(t)$ a les zéros et le signe de $t^2(3-t^2)$.

5. Dresser et justifier le tableau commun des variations de f et g sur le domaine D dans lequel figurera les limites et les valeurs extrêmes.

6. Y-a-t-il des points stationnaires ? des branches infinies à étudier ? *L'étude éventuelle à faire n'est pas exigée à cette question*

Partie II - Tangentes à l'origine et en $\mathrm{M}(\sqrt{3})$

7. Déterminer des développements limités des fonctions f et g en 0 à l'ordre 5.

8. Sans calculer les dérivées successives de f et g, expliciter les vecteurs $\begin{pmatrix} f^{(k)}(0) \\ g^{(k)}(0) \end{pmatrix}$ pour $k \in [\![2, 5]\!]$.

Le théorème utilisé sera mentionné. On vérifiera, en particulier, que $f''(0) = 2$ et $g''(0) = 0$

9. En déduire les coordonnées d'un vecteur tangent à $\mathscr{C}$ en l'origine du repère.
Quel est la nature de l'origine en tant que point de la courbe $\mathscr{C}$?

10. Que dire de la tangente à $\mathscr{C}$ en $\mathrm{M}(\sqrt{3})$?

Partie III - Asymptotes

11. Que conclure pour la courbe $\mathscr{C}$ pour t au voisinage de $+\infty$? Préciser l'allure localement pour t au voisinage de $+\infty$.

12. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote oblique dont on précisera une équation.

13. On note $\mathscr{D}$ la droite du plan d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{N}(t)$ le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse $f(t)$.
On note aussi $y_{\mathrm{M}(t)}$ et $y_{\mathrm{N}(t)}$ les ordonnées respectives des points $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{N}(t)$.
Donner une expression factorisée de $y_{\mathrm{M}(t)} - y_{\mathrm{N}(t)}$ pour en déduire le signe au voisinage de $t = 1$.

14. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote oblique (éventuellement à l'aide d'un schéma).

Partie IV - Tracé de la courbe

15. En tenant compte des informations issues des questions précédentes et en utilisant la feuille de papier millimétré fournie par le sujet, tracer la courbe $\mathscr{C}_1 = \{\mathrm{M}(t) | t \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\}$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$
On utilisera l'échelle suivante : 2 cm pour 1 unité et on considéra que $\sqrt{3} \simeq 1,73$.
On fera apparaître :

- la droite $\mathscr{D}$
- les vecteurs tangents à l'origine du repère et au point $\mathrm{M}(\sqrt{3})$
- la droite d'équation $x = -1$

16. Comment obtenir le tracé de toute la courbe $\mathscr{C}$ sans étude supplémentaire ?
Compléter le tracé précédent en pointillé pour représenter toute la courbe $\mathscr{C}$.

FIN DU DEVOIR