Nom : Année 2024-2025

Devoir surveillé n° 1 - 2h

Le sujet est à rendre avec la copie!

Question de cours

1. Compléter le tableau suivant :

La fonction f d'expression	est définie sur I =	avec $f(\mathrm{I})$ =	f est dérivable sur J =	avec, pour $x \in \mathrm{J}$, $f'(x)$ =	et on a
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathrm{I}=[0,+\infty[$	$f(\mathrm{I})=[0,+\infty[$	$\mathrm{J}=]0,+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(0)=0$
$f(x)=\mathrm{Arccos}(x)$	$\mathrm{I}=\boxed{[-1,1]}$	$f(\mathrm{I})=\boxed{[0,\pi]}$	$\mathrm{J}=\boxed{]-1,1[}$	$f'(x)=\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$	$\mathrm{Arccos}(0)=\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$
$f(x)=\tan(x)$	$\mathrm{I}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$	$f(\mathrm{I})=\boxed{[0,+\infty[}$	$\mathrm{J}=\mathrm{I}$	$f'(x)=\boxed{\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x}$	$\tan(\frac{\pi}{3})=\boxed{\sqrt{3}}$
$f(x)=\boxed{\mathrm{Arctan}(x)}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f(\mathrm{I})=\boxed{\left]-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right[}$	$\mathrm{J}=\mathrm{I}$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$f(0)=0$

2. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $y''+2y'+\alpha y=0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=-2u_{n+1}-\alpha u_n$

Donner l'équation caractéristique commune à ces deux problèmes est $\boxed{r^2+2r+\alpha=0}$

a. Si $\alpha=-3$, elle a pour racine(s) $\boxed{r_1=1 \text{ et } r_2=-3}$ car $\boxed{r_1=1 \text{ est une racine évidente de } r^2+2r-3=0 \text{ et } r_1r_2=-3\Rightarrow r_2=-3}$

L'expression de $y(x)$ est alors $\boxed{y(x)=\mathrm{A}e^x+\mathrm{B}e^{-3x} \text{ où } (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2}$

L'expression de u_n est alors $\boxed{u_n=\mathrm{A}1^n+\mathrm{B}(-3)^n=\mathrm{A}+\mathrm{B}(-3)^n \text{ où } (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2}$

b. Si $\alpha=1$, elle a pour racine(s) $\boxed{r=-1}$ car $\boxed{r^2+2r+1=(r+1)^2}$

L'expression de $y(x)$ est alors $\boxed{y(x)=(\mathrm{A}x+\mathrm{B})e^{-x} \text{ où } (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2}$

L'expression de u_n est alors $\boxed{u_n=(\mathrm{A}n+\mathrm{B})\times(-1)^n \text{ où } (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2}$

c. Si $\alpha=5$, elle a pour racine(s) $\boxed{r=-1\pm 2i}$ car $r^2+2r+5=(r^2+2r+1)-(2i)^2=\boxed{(r+1)^2-(2i)^2=(r+1-2i)(r+1+2i)}$

L'expression de $y(x)$ est alors $\boxed{y(x)=e^{-x}\big(\mathrm{A}\cos(2x)+\mathrm{B}\sin(2x)\big) \text{ où } (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2}$

L'expression de u_n est alors $\boxed{u_n=(\sqrt{5})^n\big(\mathrm{A}\cos(n\theta)+\mathrm{B}\sin(n\theta)\big) \text{ où } \theta=\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ vu que } -1+2i=\sqrt{5}\Big(\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\cos\theta}+i\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\sin\theta}\Big)}$

3. Démontrer, à l'aide de l'exponentielle complexe, la relation $\sin p+\sin q=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$ où (p,q) sont des réels quelconques

$$\begin{aligned}
\sin p+\sin q &= \Im m\left(e^{ip}+e^{iq}\right)=\Im m\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{i\frac{q-p}{2}}\right)\right) && \text{avec la technique de l'angle moitié}\\
&= \Im m\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\times 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) && \text{par les formules d'Euler}\\
&= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\Im m\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\right) && \text{car } \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ est réel}\\
&= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{EXERCICE N}^\text{O}\ 1}$ On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Écrire le théorème du rang pour la matrice M puis déterminer le rang de la matrice M.

La matrice M de $M_{3,4}(\mathbb{R})$ est canoniquement associé à un endomorphisme f de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$
Le théorème du rang s'écrit alors : $\boxed{\dim(\mathbb{R}^4) = \dim \mathrm{Ker}\,(M) + \dim \mathrm{Im}\, M}$
Les colonnes C_1, C_2, C_3 et C_4 de M sont toutes proportionnelles à la colonne $(1,1,1)$ de $\mathbb{R}^4$ qui ne contient que des 1 aussi :
$\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Vect}\big(C_1, C_2, C_3, C_4\big) = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ Dès lors, le rang de la matrice M est $\boxed{\mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Im}\, M = 1}$

2. Déterminer l'image et le noyau de la matrice M <u>sans résoudre de système</u>.

On a déjà vu que $\boxed{\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)}$. Avec le théorème du rang, on a : $\dim \mathrm{Ker}\, M = \dim(\mathbb{R}^4) - \mathrm{rg}(M) = 4 - 1 = 3$
On cherche alors 3 vecteurs linéairement indépendants situés dans Ker M pour en obtenir une base.

$C_2 = 0 \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (0,1,0,0) \in \mathrm{Ker}\, M$ $\quad C_1 - C_3 = 0 \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1,0,-1,0) \in \mathrm{Ker}\, M$

$2C_1 - C_4 = 0 \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2,0,0,-1) \in \mathrm{Ker}\, M$ et on vérifie l'indépendance linéaire de ces 3 vecteurs :

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a(0,1,0,0) + b(1,0,-1,0) + c(2,0,0,-1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (b+2c, a, -b, -c) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = 0$

On peut conclure que : $\boxed{\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Vect}\Big((0,1,0,0), (1,0,-1,0), (2,0,0,-1)\Big)}$

3. Retrouver le noyau de M en résolvant cette fois un système linéaire.

La matrice M de $M_{3,4}(\mathbb{R})$ est canoniquement associé à un endomorphisme f de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3)$ donc Ker M est un sev de $\mathbb{R}^4$.
Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}\, M \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2z+4t=0 \\ 2x+2z+4t=0 \\ 0=0 \\ 2x+2z+4t=0 \end{cases} \Leftrightarrow x+z+2t=0 \Leftrightarrow x=-z-2t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\Big((0,1,0,0), (1,0,-1,0), (2,0,0,-1)\Big)$$

On peut conclure que : $\boxed{\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Vect}\Big((0,1,0,0), (1,0,-1,0), (2,0,0,-1)\Big)}$

EXERCICE Nº 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ associé à $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

1. Calculer l'image par f du polynôme $P = 3X^2 + 2X + 1$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sont $X_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ aussi les coordonnées de $f(P)$ sont $AX_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\boxed{f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}}$. Le polynôme P est donc dans $\operatorname{Ker} f$ or $P \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc : $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \Leftrightarrow$ $\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$

En dimension finie, f injective $\Leftrightarrow$ f surjective donc on a aussi $\boxed{f \text{ non surjective}}$.

2. Justifier que f est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$.

On sait que : f est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow$ *i)* $f \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$ et *ii)* $f \circ f = f$

On sait déjà que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donc *i)* est vérifiée.

Pour vérifier *ii)*, il suffit de vérifier l'égalité matricielle $A^2 = A$ ce qu'on obtient facilement en posant le produit matriciel.

Ainsi : i) et ii) $\Leftrightarrow$ $\boxed{f \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}_2[X]}$

3. Préciser une base du noyau de f.

<u>Méthode 1</u> : Notons c_1, c_2, c_3 les colonnes de A. Les colonnes c_1 et c_3 sont non colinéaires donc $\operatorname{rg} f \geqslant 2$

De plus, $P \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$ de sorte que, par le théorème du rang : $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant 2$

Ainsi : $\operatorname{rg} f = 2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}_2[X] - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1$

Puisque $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, le vecteur P non nul de $\operatorname{Ker} f$ trouvé en 1 en donne une base : $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(P) \text{ dans } \mathbb{R}_2[X]}$

<u>Méthode 2</u> : On explicite le noyau de f à l'aide d'un système :

$$a + bX + cX^2 \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - c = 0 \\ 2a + 2b - 2c = 0 \\ 3a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3a \\ b = c - a = 2a \end{cases}$$

Ainsi : $a + bX + cX^2 \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow a + bX + cX^2 = a(1 + 2X + 3X^2)$ où $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a + bX + cX^2 \in \operatorname{Vect}(1 + 2X + 3X^2)$

En conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1 + 2X + 3X^2) = \operatorname{Vect}(P) \text{ dans } \mathbb{R}_2[X]}$

4. Préciser l'image de ce projecteur.

On a déjà prouvé à la question précédente (méthode 1) que $\operatorname{rg}(f) = 2$ (si méthode 2, il suffit d'appliquer le théorème du rang).

On peut aussi obtenir $\operatorname{rg}(f)$ ainsi : $\operatorname{rg}(f) \leqslant 2$ à cause de la question 1 qui entraîne $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$ et du théorème du rang : $\operatorname{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \operatorname{Ker} f$. Mais, $\operatorname{rg}(f) \geqslant 2$ puisque les colonnes 1 et 2 de la matrice donnent deux vecteurs linéairement indépendants de cette image.

Puisque : $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f) = 2$ et il suffit de trouver 2 vecteurs de $\operatorname{Im} f$ non colinéaires pour obtenir une base de $\operatorname{Im} f$

On utilise les colonnes 2 et 3 de la matrice A qui donnent les coordonnées des vecteurs $f(X)$ et $f(X^2)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$f(X) = X \in \operatorname{Im} f$ et $f(X^2) = -\frac{1}{2} - X - \frac{1}{2}X^2 \in \operatorname{Im} f$ sont clairement non colinéaires.

On peut donc conclure que $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(X, -\frac{1}{2} - X - \frac{1}{2}X^2\big)}$ Bien sûr : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(X, \frac{3}{2} + X + \frac{3}{2}X^2\big)$ convient aussi avec les colonnes 1 et 2

5. Vérifier que $Q = 1 + X + X^2$ et $R = X$ sont dans $\operatorname{Ker}(f - id)$. En déduire une base de $\operatorname{Ker}(f - id)$

$f - id$ est canoniquement associé à la matrice $A - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

On remarque que : $(A - I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q \in \operatorname{Ker}(f - id)$ et $(A - I_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow R \in \operatorname{Ker}(f - id)$

En outre, la matrice $A - I_3$ est clairement de rang 1 puisque, si on note C_1, C_2 et C_3 ses colonnes, $C_3 = -C_1$ et $C_2 = 0$ donc $\operatorname{Im}(f - id) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1)$ et le théorème du rang appliqué à $f - id$ donne :

$\dim \operatorname{Ker}(f - id) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$ de sorte que les 2 vecteurs Q et R de $\operatorname{Ker}(f - id)$ clairement non colinéaire (car à degré échelonné) forment une base de $\operatorname{Ker}(f - id)$: $\boxed{(Q, R) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f - id)}$

6. Quelle relation existe-t-il entre $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f - id)$? Est-ce cohérent avec vos réponses aux questions 4 et 5.

Comme f est un projecteur, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f - id)$ ce qu'on retrouve aux questions 4 et 5 puisque :

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(X, -\frac{1}{2} + X - \frac{1}{2}X^2\big) = \operatorname{Vect}\big(X, 1 - 2X + X^2\big) = \operatorname{Vect}\big(X, (1 - 2X + X^2) + 3X\big) = \operatorname{Vect}(R, Q) = \operatorname{Vect}(Q, R) = \operatorname{Ker}(f - id)$

7. Prouver que $\mathscr{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Méthode 1 f est un projecteur (cf Q2) donc $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\,(f - id)$ sont supplémentaires : $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\,(f - id) = \mathbb{R}_2[X]$
On obtient une base de $\mathbb{R}_2[X]$ en réunissant la base (P) de $\mathrm{Ker}\, f$ (cf. question 3) et la base (Q, R) de $\mathrm{Ker}\,(f - id)$ (cf. question 5) autrement dit $\mathscr{B}' = (P, Q, R)$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Méthode 2 Comme $\mathrm{Card}(B') = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, il s'agit de démontrer que $\mathscr{B}'$ est une famille libre.

Méthode a (pour les 5/2 pour l'instant) : $\det_{\mathscr{B}_{can}}(P; Q; R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times (1 \times 1 - 3 \times 1) = 2 \neq 0$ donc (P, Q, R) est libre

Méthode b : On revient à la définition de l'indépendance linéaire :

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha P + \beta Q + \gamma R = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta) + (2\alpha + \beta + ga)X + (3\alpha + \beta)X^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{array} \right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \gamma = -(2\alpha + \beta) = 0 \\ 2\alpha = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

8. Sans calcul, donner les coordonnées de $f(Q)$ et $f(R)$ dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$

On a : $Q \in \mathrm{Ker}\,(f - id) \Leftrightarrow f(Q) - Q = 0 \Leftrightarrow f(Q) = Q$ donc $f(Q)$ a pour coordonnées $X'_Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}'$

et : $R \in \mathrm{Ker}\,(f - id) \Leftrightarrow f(R) - R = 0 \Leftrightarrow f(R) = R$ donc $f(R)$ a pour coordonnées $X'_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}'$

Mais alors : $\left\{ \begin{array}{l} f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ f(Q) = Q \\ f(R) = R \end{array} \right. \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\Big(f(P), f(Q), f(R)\Big) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'}$

9. Vérifier que la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$ est $N = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Méthode 1 : On connaît facilement la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ qui est $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P, Q, R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$ est alors M^{-1} or on vérifie que :

$M \times \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $N = M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(1, X, X^2)$

Méthode 2 : Il s'agit de vérifier que $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(1, X, X^2) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ autrement dit que

1 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}'$ soit que $-\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q - \frac{1}{2}R = 1$ or $-\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}Q - \frac{1}{2}R = -\frac{1}{2}(1 + 2X + 3X^2)) + \frac{3}{2}(1 + X + X^2) - \frac{1}{2}X = 1$

De même, on vérifie : $R = X$ et $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}R = X^2$ pour vérifier les deux autres colonnes de N

10. Donner une relation matricielle liant les matrices A et A' faisant intervenir la matrice N et son inverse.

En notant M la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on a : $A' = M^{-1}AM$. Or, on sait que $N = M^{-1}$ donc $\boxed{A' = NAN^{-1}}$

Remarques suite à la correction

La moyenne du devoir est de 11,97 pour une médiane à 13,13. L'écart-type est de 3,9 et l'étendue de 6.1 à 18. Le sujet a donc été classant assurant une bonne ventilation des copies. Bien que certaines copies soient faibles, je suis globalement assez satisfaite du travail de chacun : certains ont encore des problèmes de compréhension mais je décèle, dans leurs copies, des efforts et je suis sûre que nous lèverons progressivement les difficultés... Dans le détail :

- 3 très bonnes copies (notes>16.9) : les connaissances sont présentes avec des résolutions efficaces et pertinentes.
- 6 copies prometteuses (13<notes<14) : connaissances présentes mais manque encore d'efficacité voir parfois encore des maladresses à corriger
- 4 copies encore un peu juste (8,7<notes< 10.25) : des confusions dans les connaissances ne permettent pas d'avancer en profondeur dans la résolution des exercices
- 3 copies trop justes (6.1<notes<7,5) : trop de confusions dans les connaissances qui conduisent à n'aborder que trop peu de questions voir à écrire des bêtises.

Questions de cours :

La notion d'image $f(\mathrm{I}) = \left\{f(x) \mid x \in \mathrm{I}\right\}$ n'est pas maîtrisée par tous... En particulier, peu d'entre vous ont remarqué que la fonction tangente était restreinte à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ d'où une image $f(\mathrm{I}) = \left[0, +\infty\right[$.

De même, il est regrettable de ne pas savoir que $f'(x)$ doit être définie pour tous les x de J donc qu'il y a un lien entre $f'(x)$ et le domaine J de dérivabilité : $\mathrm{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nécessite d'avoir $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-1,1[= \mathrm{J}$! C'est donc curieux d'avoir des dérivées en $\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ (expression définie pour tout x réel) associée à une fonction que vous annoncez dérivable uniquement sur $]-1,1[$...

Il y avait une coquille dans à la fin de la question 2 (via l'indication $r^2+2r+5 = (r^2+2r+1)-(2i)^2$) souvent corrigée par les étudiants qui ont utilisés cette indication ou bien qui a été ignorée sans gêner la détermination des racines. Dans cette question, vous êtes encore trop nombreux à ne pas connaître les expressions pour les suites. Pour les solutions d'équations différentielles, vous manquez de rigueur : le sujet demande $y(x)$ donc la variable est x et pas t...La dernière question, plus difficile, n'a pas été réussi : il fallait trouver une forme exponentielle de $-1+2i$. Parfois, vous trouvez le module $\rho = \sqrt{5}$ mais ne pensez pas à utiliser la fonction Arccos pour déterminer l'argument...Nous avions pourtant vu cette astuce dans la démonstration du « lemme »

Si $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe un réel θ avec $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$

Exercice 1

1. Encore trop de théorème du rang matriciel mal écrit : c'est un savoir-faire indispensable à maîtriser !
   Concernant le calcul du rang, des réponses loufoques (style « le rang vaut 4 car 4 colonnes ») m'inquiètent d'autant plus que parfois l'image donnée ensuite est correcte... Beaucoup ont été gêné par la 2ème colonne : cette incompréhension est probablement liée à une mauvaise compréhension d'un espace engendré. Je détaille, ci-dessous, encore plus le raisonnement :
   « *D'après le cours :* $Im\,\mathrm{M} = Vect(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4) = \left\{\alpha\mathrm{C}_1 + \beta\mathrm{C}_2 + \gamma\mathrm{C}_3 + \delta\mathrm{C}_4 \mid (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4\right\}$
   Or : $\mathrm{C}_2 = 0$ *donc* $Im\,\mathrm{M} = \left\{\alpha\mathrm{C}_1 + \gamma\mathrm{C}_3 + \delta\mathrm{C}_4 \mid (\alpha,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^3\right\} = Vect(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4)$
   et aussi : $\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_1$ *et* $\mathrm{C}_4 = \mathrm{C}_1$ *donc* $Im\,\mathrm{M} = \left\{\alpha\mathrm{C}_1 + \gamma\mathrm{C}_1 + \delta\mathrm{C}_1 \mid (\alpha,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{k \times \mathrm{C}_1 \mid k \in \mathbb{R}\right\} = Vect(\mathrm{C}_1)$ »
2. Pour le noyau, le théorème du rang permet d'obtenir sa dimension et donc le nombre de vecteurs d'une base de Ker M. On utilise ensuite les relations trouvées sur les colonnes (lors du calcul du rang) pour obtenir des vecteurs de Ker M. Il ne faut pas oublier de justifier l'indépendance linéaire. En effet, on a alors une famille libre qui a le bon cardinal et qui est donc une base de Ker M.
3. La question a été peu réussie et, lorsqu'elle est traitée, la rédaction peut être améliorée .
   Je rappelle qu'il faut obtenir une équivalence type : $(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker\,M} \Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}(u,v,w)$ pour justifier l'égalité $\mathrm{Ker\,M} = \mathrm{Vect}(u,v,w)$...

Exercice 2

1. Des raisonnements parfois bien compliqués pour calculer $f(\mathrm{P})$. Il n'y a pourtant que deux approches :
   - celle utilisant la linéarité de f : $f(\mathrm{P}) = f(1) + 2f(\mathrm{X}) + 3f(\mathrm{X}^2)$ et on trouve $f(1)$, $f(\mathrm{X})$ et $f(\mathrm{X}^2)$ dans les colonnes de A
   - celle utilisant les coordonnées : P est un vecteur associé à une colonne de coordonnée $\mathrm{X_P}$ et les coordonnées de $f(\mathrm{P})$ seront $\mathrm{AX_P}$
   Vous identifiez, en général, $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$ conduisant à la non-injectivité.
   Il n'est pas nécessaire de connaître le rang ou l'image pour conclure à la non-surjectivité, puisque pour un endomorphisme en dimension finie, les deux notions (injectivité et surjectivité) sont équivalentes. C'est une conséquence du théorème du rang :
   si $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$, alors $\dim \mathrm{Ker}\, f > 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] - \dim\mathrm{Ker}\, f < \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \Rightarrow \mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$
2. La méthodologie est connue mais il ne faut pas faire d'erreur de calcul...
3. Il manque souvent un argument de dimension...La question 1 permet seulement d'affirmer que $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}\, f$ donc que $\mathrm{Vect(P)} \subset \mathrm{Ker}\, f$
   Pour affirmer l'égalité, il faut justifier que $\dim\mathrm{Ker}\, f = 1$ à l'aide d'un calcul de rang...
   Une autre approche est de chercher directement le noyau à l'aide d'un système...(Voir corrigé)
4. Le théorème du rang devait être formulé soit en question 3 soit en question 4. Dans cette question, il fallait essentiellement faire attention au SENS : on demande $\mathrm{Im}\, f$ (sev de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$) qu'on obtient à l'aide de Im A (sev de $\mathbb{R}^3$) via la base canonique $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$
   Une petite coquille s'est glissée dans mon corrigé où $f(\mathrm{X}^2) = -\frac{1}{2} - \mathrm{X} - \frac{1}{2}\mathrm{X}^2$ (et pas $-\frac{1}{2} + \mathrm{X} - \frac{1}{2}\mathrm{X}^2$)
5. Dans le corrigé, j'utilise $\mathrm{A} - \mathrm{I}_3$ mais, pour vérifier $\mathrm{Q} \in \mathrm{Ker}\,(f - id)$, on peut aussi vérifier $f(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}$ en vérifiant $\mathrm{AX_Q} = \mathrm{X_Q}$ où $\mathrm{X_Q}$ coordonnées de Q.
   Attention, le fait que Q et R sont dans $\mathrm{Ker}\,(f - id)$ permet seulement de dire que $\mathrm{Vect(P,Q)} \subset \mathrm{Ker}\,(f - id)$. Il faut aussi un argument de dimension pour obtenir l'égalité ce qu'on obtient facilement par un calcul de rang.
6. Question peu traitée alors que c'est une question de cours : f est un projecteur donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\,(f - id)$. Vérifiée la cohérence avec les questions 4 et 5 étaient plus techniques (voir corrigé)
7. L'enchaînement des questions (pointant le projecteur) amène normalement à la méthode 1 du corrigé.
   Dans la pratique, vous utilisez plutôt la méthode 2. Attention, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ (Je rappelle, au passage, que $\dim \mathscr{B}'$ n'a aucun SENS...) et il ne faut pas oublier de vérifier la liberté de $\mathscr{B}'$: $\begin{cases} \mathrm{Card}(\mathscr{B}') = \dim \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathscr{B}' \text{ famille libre de } \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \end{cases} \Rightarrow \mathscr{B}'$ est une base (et donc $\mathscr{B}'$ est, en autre, génératrice)
8. Question bien traitée lorsqu'elle l'a été...Veillez à bien répondre à la totalité de la question !
9. Attention, N est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ (et pas de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$!) : il ne fallait pas tomber dans le piège...
10. C'est bien sûr une question de cours...mais il faut bien lire le sujet pour bien écrire la bonne relation !