Nom : Année 2024-2025

Devoir surveillé n° 1 - 2h

Le sujet est à rendre avec la copie !

Question de cours

1. Compléter le tableau suivant :

La fonction f d'expression	est définie sur $I =$	avec $f(I) =$	f est dérivable sur $J =$	avec, pour $x \in J$, $f'(x) =$	et on a
$f(x) = \sqrt{x}$	$I = [0, +\infty[$	$f(I) = [0, +\infty[$	$J =]0, +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(0) = 0$
$f(x) = \text{Arccos}(x)$	$I =$	$f(I) =$	$J =$	$f'(x) =$	$\text{Arccos}(0) =$
$f(x) = \tan(x)$	$I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$	$f(I) =$	$J = I$	$f'(x) =$	$\tan(\dfrac{\pi}{3}) =$
$f(x) =$	$I = \mathbb{R}$	$f(I) =$	$J = I$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(0) = 0$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + \alpha y = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - \alpha u_n$

Donner l'équation caractéristique commune à ces deux problèmes est ....

a. Si $\alpha = -3$, elle a pour racine(s).................. car ....
L'expression de $y(x)$ est alors ....
L'expression de u_n est alors ....

b. Si $\alpha = 1$, elle a pour racine(s) .... car ....
L'expression de $y(x)$ est alors ....
L'expression de u_n est alors ....

c. Si $\alpha = 5$, elle a pour racine(s) .... car $r^2 + 2r + 5 = (r^2 + 2r + 1) - (2i)^2 =$
L'expression de $y(x)$ est alors ....
L'expression de u_n est alors ....

3. Démontrer, à l'aide de l'exponentielle complexe, la relation $\sin p + \sin q = 2\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ où (p, q) sont des réels quelconques

EXERCICE N° 1 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Écrire le théorème du rang pour la matrice M puis déterminer le rang de la matrice M.

2. Déterminer l'image et le noyau de la matrice M sans résoudre de système.

3. Retrouver le noyau de M en résolvant cette fois un système linéaire.

EXERCICE N° 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ associé à $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$

1. Calculer l'image par f du polynôme $P = 3X^2 + 2X + 1$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

2. Justifier que f est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Préciser une base du noyau de f.

4. Préciser l'image de ce projecteur.

5. Vérifier que $Q = 1 + X + X^2$ et $R = X$ sont dans Ker $(f - id)$. En déduire une base de Ker $(f - id)$

6. Quelle relation existe-t-il entre Im (f) et Ker $(f - id)$? Est-ce cohérent avec vos réponses aux questions 4 et 5.

7. Prouver que $\mathscr{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. Sans calcul, donner les coordonnées de $f(Q)$ et $f(R)$ dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$

9. Vérifier que la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$ est $N = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

10. Donner une relation matricielle liant les matrices A et A' faisant intervenir la matrice N et son inverse.