PT : Correction du Concours Blanc 2024-2025

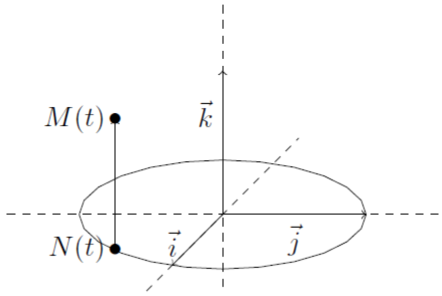
Première Partie : Partie I du sujet maths B de 2021

Modélisation d'un manège de chevaux de bois.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Un manège pour enfant est constitué d'un cheval de bois tournant autour de l'axe du manège et animé d'un mouvement vertical.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et on suppose que les coordonnées du point $M(t)$ sont
$$\left(\cos t, \sin t, \frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{2}\right)$$



On note $\mathscr{C}$ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

Pour tout réel t, on appelle vecteur vitesse au point $M(t)$ le vecteur $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ et vecteur accélération au point $M(t)$ le vecteur $\vec{A}(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)$. On note $V(t)$ et $A(t)$ les normes des vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{A}(t)$.

1. a. Démontrer que tous les points de $\mathscr{C}$ sont réguliers.

Pour tout t réel : $M(t)$ est régulier $\Leftrightarrow \vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \neq \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{V}(t)\| = V(t) \neq 0$.

Il est clair que $[t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puisque ses trois coordonnées le sont comme produit et combinaison linéaire de fonctions usuelles et : $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{2}\sin t \cos t\right) = \left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{4}\sin(2t)\right)$

en utilisant $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

Aussi : $\|\vec{V}(t)\|^2 = V(t)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + \dfrac{1}{16}\sin^2(2t) = 1 + \dfrac{1}{16}\sin^2(2t) \geqslant 1$ donc $V(t) \neq 0$ et $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ est régulière}}$

b. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point $M(t)$ où $t \in \mathbb{R}$

Puisque $M(t)$ est régulier, la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(t)$ est dirigée par $\boxed{\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{4}\sin(2t)\right)}$

c. Dans le cas particulier $t = \dfrac{\pi}{3}$, donner une équation du plan passant pas $M(t)$ et orthogonal à la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(t)$

On appelle Π ce plan. Il passe par $M(\frac{\pi}{3}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{11}{16}\right)$ et admet $\vec{V}(\frac{\pi}{3}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ pour vecteur normal. Une équation est donc de la forme $\Pi : -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{8}z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$ tel que :

$M(\frac{\pi}{3}) \in \Pi \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\times\dfrac{11}{16} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\dfrac{11\sqrt{3}}{8\times 16}$

2. **Ne traiter cette question que si tous le reste a été traité !**

a. Déterminer $V(t)$ et $A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En reprenant le calcul de la question 1.(a) : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ V(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{16}\sin^2(2t)}}$. Par ailleurs, $[t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$\vec{A}(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t) = \dfrac{d\vec{V}}{dt}(t) = \left(-\cos t, -\sin t, \frac{1}{4}\times 2\cos(2t)\right) = \left(-\cos t, -\sin t, \frac{1}{2}\cos(2t)\right)$

de sorte que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad A(t) = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + \frac{1}{4}\cos^2(2t)} \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad A(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2(2t)}}$

b. Pour quelles valeurs de t, $V(t)$ est-elle minimale ? maximale ?

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant \sin^2(2t) \leqslant 1$. Ainsi : $1 \leqslant V(t) \leqslant \sqrt{1+\dfrac{1}{16}}$ Les inégalités peuvent devenir des égalités : pour $t=0$, $\sin^2(2t)=0$ d'où $V(t)=1$ et, pour $t=\dfrac{\pi}{4}$, $\sin^2(2t)=1$ d'où $V(t)=\sqrt{1+\dfrac{1}{16}}$. Finalement :
$V(t)$ est minimale lorsque $V(t)=1 \Leftrightarrow \sin^2(2t)=0 \Leftrightarrow 2t \equiv 0\,[\pi] \Leftrightarrow t \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ soit $t \in \left\{k\dfrac{\pi}{2},\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$
$V(t)$ est maximale lorsque $\sin^2(2t)=1 \Leftrightarrow \sin(2t)=\pm 1 \Leftrightarrow 2t \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \Leftrightarrow t \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ soit $t \in \left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

c. Vérifier que $V(t)$ est minimale lorsque $A(t)$ est maximale. Que peut-on dire de la direction du vecteur $\overrightarrow{V}(t)$ dans ce cas?

Lorsque t décrit $\mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant \cos^2(2t) \leqslant 1$. Ainsi : $1 \leqslant A(t) \leqslant \sqrt{1+\dfrac{1}{4}}$ Les inégalités peuvent devenir des égalités : pour $t=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos^2(2t)=0$ d'où $A(t)=1$ et, pour $t=0$, $\cos^2(2t)=1$ d'où $A(t)=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}$
Ainsi : $A(t)$ est maximale $\Leftrightarrow \cos^2(2t)=1 \Leftrightarrow \sin^2(2t)=0 \Leftrightarrow V(t)$ est minimale
Dans ce cas, puisque $\sin^2(2t)=0 \Leftrightarrow \sin(2t)=0=2\sin t\cos t$, on sait que la 3ème coordonnées de $\overrightarrow{V}(t)$ est nulle et soit l'une des coordonnées (abscisse ou ordonnée) est aussi nulle

$\boxed{\text{la direction du vecteur } \overrightarrow{V}(t) \text{ est incluse dans le plan Vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath})\text{, colinéaire à } \vec{\imath} \text{ ou à } \vec{\jmath}}$

On peut aussi remarquer que :
$\overrightarrow{V}(t).\overrightarrow{A}(t)=\sin t\cos t-\cos t\sin t+\left(\dfrac{1}{4}\sin(2t)\right)\left(\dfrac{1}{2}\cos(2t)\right)=\dfrac{1}{8}\sin(2t)\cos(2t)=\dfrac{1}{16}\sin(4t)=\dfrac{1}{8}\cos(2t)\sin(2t)$
aussi $\overrightarrow{V}(t).\overrightarrow{A}(t)=0$ lorsque $\sin(2t)=0$ autrement dit $\boxed{\overrightarrow{V}(t) \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{A}(t)}$

3. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ est incluse dans la surface Σ d'équation $x^2+y^2=1$

Notons $M(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ les coordonnées de $M(t)$, on vérifie que : $\forall t\in\mathbb{R}$, $x^2(t)+y^2(t)=\cos^2 t+\sin^2 t=1$
Ainsi, tous les points de la courbe $\mathscr{C}$ sont bien situés sur la surface Σ : $\boxed{\mathscr{C}\subset\Sigma}$

4. Le propriétaire du manège souhaite construire un toit incliné au dessus de son manège. Pour en connaître la forme, il fait l'intersection de la surface Σ avec le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $z=3-\dfrac{3}{4}y$.

Une représentation cartésienne du bord du toit est donc $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3-\dfrac{3}{4}y \end{cases}$. On note $\mathscr{BT}$ cette courbe

a. Donner un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{BT}$ au point de coordonnées $(1,0,3)$

Méthode n° 1 : $\mathscr{BT}$ est l'intersection de deux surfaces :
l'une est la surface Σ d'équation $\underbrace{x^2+y^2-1}_{=f(x,y,z)}=0$ et l'autre est le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $\underbrace{z+\dfrac{3}{4}y-3}_{g(x,y,z)}=0$

Les fonctions f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et on a : $\overrightarrow{grad}f(x,y,z)=\big(2x,2y,0\big)$ et $\overrightarrow{grad}g(x,y,z)=\left(0,\dfrac{3}{4},1\right)$
Le point de coordonnées $(1,0,3)$ est régulier pour chacune de ces surfaces (les gradients ne s'annulant pas en $(1,0,3)$) et : $\overrightarrow{grad}f(1,0,3)\wedge\overrightarrow{grad}g(1,0,3)=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3/4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3/2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ D'après le cours, on sait que le point $(1,0,3)$ est régulier pour la courbe $\mathscr{BT}$ et que la tangente en ce point à $\mathscr{BT}=\Sigma\cap\mathscr{Q}$ est dirigée par $-2\vec{\jmath}+\dfrac{3}{2}\vec{k}$

Méthode n° 2 : On cherche une représentation paramétrique de $\mathscr{BT}$:

$$N(x,y,z)\in\mathscr{BT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3-\dfrac{3}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R}, \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=3-\dfrac{3}{4}\sin\theta \end{cases}$$

aussi $[\theta\mapsto P(\theta)]$ où $P(\theta)=\left(\cos\theta,\sin\theta,3-\dfrac{3}{4}\sin\theta\right)$ est un paramétrage de $\mathscr{BT}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :
$\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta}=\left(-\sin\theta,\cos\theta,-\dfrac{3}{4}\cos\theta\right)\neq(0,0,0)$ car $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta}\right\|^2=1+\dfrac{9}{4}\cos^2\theta>0$
Ainsi, $\mathscr{BT}$ est une courbe régulière. On remarque que $(1,0,3)=P(0)$ aussi un vecteur directeur de la tangente en $P(0)$ est $\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta}(0)=(0,1,-\dfrac{3}{2})$ soit $\vec{\jmath}-\dfrac{3}{4}\vec{k}$
$-2\vec{\jmath}+\dfrac{3}{2}\vec{k}=-2\left(\vec{\jmath}-\dfrac{3}{4}\vec{k}\right)$ donc les deux méthodes sont en cohérence.

b. Donner un vecteur <u>unitaire</u> normal au plan $\mathcal{Q}$: $\frac{3}{4}y+z-3=0$

Un vecteur normal à $\mathcal{Q}$ est $\vec{n}=\left(0,\frac{3}{4},1\right)$ donc, pour obtenir un vecteur unitaire, on divise par sa norme :

$$\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16}+1}}\left(0,\frac{3}{4},1\right)=\sqrt{\frac{16}{25}}\left(0,\frac{3}{4},1\right)=\frac{4}{5}\left(0,\frac{3}{4},1\right)=\boxed{\left(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}}$$

c. On considère la matrice $P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&5&0\\-4&0&3\\3&0&4\end{pmatrix}$

i. Démontrer que la matrice P est orthogonale.

On note C_i la colonne i de la matrice P qui est dans $M_3(\mathbb{R})$. On sait que :

$$P\in O_3(\mathbb{R})\Leftrightarrow (C_1,C_2,C_3) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow C_1.C_2=0,\ C_1.C_1=C_2.C_2=1 \text{ et } C_1\wedge C_2=\pm C_3$$

On vérifie que : $C_1.C_2=0$, $\|C_1\|=\frac{1}{5}\sqrt{0^2+(-4)^2+3^2}=\frac{\sqrt{25}}{5}=1$, $\|C_2\|=\|(1,0,0,)\|=1$ et $C_1\wedge C_2=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}0\\-4\\3\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}0\\3\\4\end{vmatrix}=C_3$

aussi les colonnes sont 2 à 2 orthogonales et unitaires donc elles forment bien une base orthonormée :

$\boxed{\text{la matrice P est une matrice orthogonale}}$

OU BIEN : $P\times P^T=\frac{1}{5^2}\begin{pmatrix}0&5&0\\-4&0&3\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-4&3\\5&0&0\\0&3&4\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25&0&0\\0&16+9&0\\0&0&16+9\end{pmatrix}=I_3$ donc $\boxed{P\in O_3(\mathbb{R})}$

ii. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice P.
Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Le calcul précédent sur les colonnes permet d'affirmer que (C_1,C_2,C_3) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ OU BIEN $\det(P)=\begin{vmatrix}0&1&0\\-4/5&0&3/5\\3/5&0&4/5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-4/5&3/5\\3/5&4/5\end{vmatrix}=-\left(-\frac{16}{25}-\frac{9}{25}\right)=+\frac{16+9}{25}=+1$

Aussi, $P\in SO_3(\mathbb{R})$ autrement dit $\boxed{f \text{ est une rotation vectorielle}}$

Il s'agit ensuite de déterminer son axe D et l'angle θ de cette rotation. On sait que :

$D=\mathrm{Ker}\,(f-id)=\mathrm{Ker}\,(P-I_3)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-5&5&0\\-4&-5&3\\3&0&-1\end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1

Attention à ne pas oublier le coefficient $\frac{1}{5}$ en facteur devant P pour la diagonale!

On remarque que : $(P-I_3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\text{le vecteur } \vec{u}=(1,1,3) \text{ dirige l'axe D de cette rotation}}$

l'angle de la rotation vérifie : $\mathrm{tr}(P)=2\cos\theta+1\Leftrightarrow\frac{4}{5}=2\cos\theta+1\Leftrightarrow\cos\theta=-\frac{1}{10}\Leftrightarrow\theta=\pm\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{10}\right)$

Pour préciser $\pm$, on cherche le signe de $\sin\theta$. On choisit $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ unitaire et orthogonal à $\vec{u}$.

Or : $\vec{v}\wedge f(\vec{v})=\sin\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et : $\vec{v}\wedge f(\vec{v})=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}\wedge\frac{1}{\sqrt{2}}P\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}-5\\-4\\3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3\\?\\??\end{vmatrix}$ et $\sin\theta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{11}}\begin{vmatrix}1\\1\\3\end{vmatrix}$

En comparant le signes des abscisses, on vérifie que $\sin\theta<0$ donc $\theta=-\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{10}\right)$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est la rotation d'axe } D=\mathrm{Vect}\big((1,1,3)\big) \text{ et d'angle } \theta=-\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{10}\right)}$

d. On note $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs $\quad \vec{u} = \dfrac{1}{5}(-4\vec{j} + 3\vec{k}), \quad \vec{v} = \vec{i} \quad$ et $\quad \vec{w} = \dfrac{1}{5}(3\vec{j} + 4\vec{k})$.

Sans calcul supplémentaire, justifier que $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ est une base orthonormée directe.

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ correspondent respectivement aux colonnes C_1, C_2 et C_3 de la matrice P donc on a déjà justifié aux questions précédentes que $\boxed{\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) \text{ est une base orthonormée directe}}$

e. On note Ω le point de coordonnées $(0,0,3)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit M un point de $\mathbb{R}^3$. On note (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, (x_1, y_1, z_1) ses coordonnées dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (X, Y, Z) ses coordonnées dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

i. Quelle relation existe-t-il entre les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$?

Par définition, P est la matrice de passage entre la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ d'où la relation de changement de base : $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. Par ailleurs, on a, par relation de Chasles : $\quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = 3\vec{k} + x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad$ ce qui donne

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 3 + z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ par unicité des coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ainsi : $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = Y \\ y = \dfrac{1}{5}(-4X + 3Z) \\ z = 3 + \dfrac{1}{5}(3X + 4Z) \end{cases}}$

ii. Démontrer que dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, une représentation cartésienne de $\mathscr{BT}$ est $\begin{cases} 16X^2 + 25Y^2 = 25 \\ Z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 - \dfrac{3}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y^2 + \dfrac{1}{25}(-4X + 3Z)^2 = 1 \\ \cancel{3} + \dfrac{1}{5}(3X + 4Z) = \cancel{3} - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{5}(-4X + 3Z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25Y^2 + (16X^2 - 24Z + 9Z^2) = 25 \\ -4(3X + 4Z) = 3(-4X + 3Z) \end{cases}$$

La seconde équation donne : $\cancel{-12X} - 16Z = \cancel{-12X} + 9Z \Leftrightarrow 25Z = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ qu'on peut substituer dans la première

Ainsi : $\boxed{\mathscr{BT} : \begin{cases} 16X^2 + 25Y^2 = 25 \\ Z = 0 \end{cases}}$

iii. En déduire la nature de $\mathscr{BT}$

Dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, c'est une courbe plane située dans le plan $\Omega + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ d'équation $\dfrac{X^2}{(\frac{5}{4})^2} + \dfrac{Y^2}{1^2} = 1$

C'est une ellipse de centre Ω, d'axes de symétries $\Omega + \mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\Omega + \mathrm{Vect}(\vec{v})$, de demi-axe $a = \dfrac{5}{4}$ et $b = 1$.

5. $\boxed{\textbf{Ne traiter cette question que si tous le reste a été traité!}}$

Suite à une erreur de montage, le support du cheval de bois, c'est à dire la droite $(N(t)M(t))$, n'est plus vertical mais incliné. A l'instant $t=0$, ce support, noté Δ_λ a pour équations cartésiennes $\begin{cases} x=\lambda z \\ y=1+\lambda z \end{cases}$ où λ est un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$

a. Déterminer une équation de la surface de révolution S_λ obtenue en faisant tourner la droite Δ_λ autours de l'axe (Oz).

Le sujet laisse le candidat libre de choisir s'il donne une représentation paramétrique ou cartésienne

Méthode n° 1 : $M(x,y,z)\in S_\lambda \Leftrightarrow \exists P\in\Delta_\lambda$ tels que M et P sont sur le même cercle d'axe (Oz) soit $\begin{cases} \|\overrightarrow{OM}\|^2=\|\overrightarrow{OP}\|^2 \\ \overrightarrow{PM}.\vec{k}=0 \end{cases}$

Ce cercle d'axe (Oz) est l'intersection de la sphère de centre O de rayon $\|\overrightarrow{OP}\|$ (d'où $\|\overrightarrow{OM}\|^2=\|\overrightarrow{OP}\|^2$) avec le plan issue de P normal à (Oz) (soit $\overrightarrow{PM}.\vec{k}=0$)

$M(x,y,z)\in S_\lambda \Leftrightarrow \exists P=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $\begin{cases} a=\lambda c \\ b=1+\lambda c \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \\ z-c=0 \end{cases}$

En éliminant les paramètres ($c=z,\ a=\lambda z$ et $b=1+\lambda z$), on a :

$M(x,y,z)\in S_\lambda \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=\lambda^2z^2+(1+\lambda z)^2+z^2$ soit $\boxed{S_\lambda : x^2+y^2=\lambda^2z^2+(1+\lambda z)^2}$

Méthode n° 2 : On obtient une représentation paramétrique en utilisant les matrices de rotation autour (Oz)

$$M(x,y,z)\in S_\lambda \Leftrightarrow \exists P=(a,b,c)\in\Delta_\lambda, \exists\theta\in\mathbb{R}, \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists z\in\mathbb{R}, \exists\theta\in[0,2\pi[, \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda z\\ 1+\lambda z\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\cos\theta)z-(\sin\theta)(1+\lambda z)\\ \lambda(\sin\theta)z+(\cos\theta)(1+\lambda z)\\ z\end{pmatrix}$$

Ainsi, une représentation paramétrique de S_λ est : $\boxed{S_\lambda : \begin{cases} x=\lambda(\cos\theta)t-(\sin\theta)(1+\lambda t) \\ \lambda(\sin\theta)t+(\cos\theta)(1+\lambda t) \\ z=t \end{cases}, (t,\theta)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi[}$

b. Justifier que S_λ est une surface réglée.

Une surface est réglée lorsque c'est une réunion de droites. Ici, on peut construire S_λ comme la réunion des droites $r_\theta(\Delta_\lambda)$ image par la rotation d'axe (Oz) et d'angle $\theta\in[0,2\pi[$ de la droite Δ_λ. Ainsi : $\boxed{S_\lambda \text{ est une surface réglée}}$

On peut préciser une famille de génératrices en remarquant que les courbes coordonnées à $\theta=\theta_0$ fixé sont des droites : $\mathscr{C}_{\theta=\theta_0}$:

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta_0\\ \cos\theta_0\\ 0\end{pmatrix}}_{=A_{\theta_0}} + t\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda(\cos\theta_0-\sin\theta_0)\\ \lambda(\cos\theta_0+\sin\theta_0)\\ 1\end{pmatrix}}_{=\vec{u}_{\theta_0}}, t\in\mathbb{R} \quad \text{où } \vec{u}_{\theta_0}\neq\vec{0} \text{ donc } \quad \mathscr{C}_{\theta=\theta_0}=A_{\theta_0}+\mathrm{Vect}(\vec{u}_{\theta_0})$$

On retrouve ainsi également le caractère réglé de la surface : $S_\lambda=\bigcup_{\theta_0\in\mathbb{R}}\mathscr{C}_{\theta=\theta_0}$ est une réunion de droites

Le rapport souligne que **la description des génératrices était attendue** ce qui n'est absolument pas clair dans la question...

c. Le propriétaire du manège souhaite désormais savoir quelle sera la forme du bord de son nouveau toit, noté $\mathscr{BT}_\lambda$ obtenu en faisant l'intersection de S_λ et du plan $\mathscr{Q}$ défini dans la question 4.

On admet que dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, une représentation cartésienne de $\mathscr{BT}_\lambda$ est

$$\begin{cases} \frac{2}{25}(8-9\lambda^2)X^2-\frac{2\lambda}{25}(18\lambda+15)X+Y^2=18\lambda^2+6\lambda+1 \\ Z=0 \end{cases}$$

A quel type de conique, la courbe $\mathscr{BT}_\lambda$ appartient-elle ?

Dans le plan $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ d'équation $Z=0$, on reconnaît une équation de conique sans terme croisée. Le centre est éventuellement déplacé sur l'axe $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ en utilisant une identité remarquable pour réunir les 2 premiers termes. Il n'y a pas de terme croisé donc la matrice symétrique associé est $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{25}(8-9\lambda^2) & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Pour préciser la nature de cette conique, on étudie le signe de $\det(A)=8-9\lambda^2$ et on distingue 3 situations :

Si $8-9\lambda^2>0\Leftrightarrow 0\leqslant\lambda<\frac{2}{3}\sqrt{2}$ alors la courbe $\mathscr{BT}_\lambda$ sera du genre ellipse (éventuellement dégénérée en un point ou l'ensemble vide)

Si $8-9\lambda^2=0\Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ alors la courbe $\mathscr{BT}_\lambda$ sera du genre parabole (éventuellement dégénérée en deux droites parallèles, une seule droite ou l'ensemble vide)

Si $8-9\lambda^2<0\Leftrightarrow 1\geqslant\lambda>\frac{2}{3}\sqrt{2}$ alors la courbe $\mathscr{BT}_\lambda$ sera du genre hyperbole (éventuellement dégénérée en deux droites sécantes)

<u>Deuxième partie</u> : Partie II du sujet maths C de 2015

On rappelle que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente. L'objectif de la partie est de calculer la valeur de I.

Pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose : $h(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ et calculer sa valeur.

$\left[\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right]$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et : $\forall \mathrm{A} > 0, \displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} \varphi(x)\mathrm{d}x = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^{\mathrm{A}} = \mathrm{Arctan}(\mathrm{A}) \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$

Ainsi, par définition, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}}$

2. Montrer que h est définie et continue sur $[0,+\infty[$. Que vaut $h(0)$?

On pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ pour $t \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$ **Attention ! Ici, t est le paramètre et x est la variable intégrée...**

<u>Énonce du théorème</u> : h où $h(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ sera continue sur $[0,+\infty[$ lorsque :

i) $\forall t \geqslant 0$, $[x \mapsto f(x,t)]$ est continue sur $[0,+\infty[$

ii) $\forall x \geqslant 0$, $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur $[0,+\infty[$

iii) *Domination* : il existe φ une fonction continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ avec : $\forall t \geqslant 0, \forall x \geqslant 0, |f(x,t)| \leqslant \varphi(x)$

(La domination est indépendante du paramètre $t \geqslant 0$)

<u>Vérifications des hypothèses</u> : Par les théorèmes usuels sur les fonctions de deux variables, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (car $1+x^2 \neq 0$) et donc aussi sur $[0,+\infty[^2$ de sorte que <u>i) et ii) sont vérifiées</u>

Pour la domination : $\forall t \geqslant 0, \forall x \geqslant 0,\ tx^2 \geqslant 0 \Rightarrow 0 < e^{-tx^2} \leqslant 1 \Rightarrow_{1+x^2>0} 0 < f(x,t) \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow |f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$

φ est bien continue et positive sur $[0,+\infty[$ et elle y est intégrable (la preuve a été faite dans la question 1) et <u>iii) est vérifiée</u>

<u>Conclusion</u> : par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, $\boxed{h \text{ est définie et continue sur } [0,+\infty[}$

Enfin : $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \Leftrightarrow \boxed{h(0) = \frac{\pi}{2}}$ d'après la question 1.

3. a. Soit a un réel strictement positif. Montrer que h est dérivable sur $[a,+\infty[$.

Avec les notations de la question précédente, on utilise le théorème de dérivation d'une intégrable à paramètre sous la contrainte $t \in [a,+\infty[$

<u>Énoncé du théorème</u> : h sera de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ lorsque :

i) $\forall t \geqslant a$, $[x \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

ii) $\forall x \geqslant 0$, $[t \mapsto f(x,t)]$ est C^1 sur $[a,+\infty[$

iii) $\forall t \geqslant a$, $\left[x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right]$ est continue sur $[0,+\infty[$

iv) Il existe Ψ une fonction continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ avec : $\forall t \geqslant a, \forall x \geqslant 0, \left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant \Psi(x)$

(La domination est indépendante du paramètre $t \geqslant a$)

<u>Vérifications des hypothèses</u> : Puisque $f(x,t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant a$ et $x \geqslant 0$, l'intégrabilité de $[x \mapsto f(x,t)]$ équivaut à justifier la convergence de $h(t)$ pour $t \geqslant a$ fixé ce qui a donc été prouvé dans la question précédente et <u>i) est vérifiée</u> Par les théorèmes usuels sur les fonctions de deux variables, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (car $1+x^2 \neq 0$) et donc aussi sur $[0,+\infty[\times[a,+\infty[s$ de sorte que <u>ii) et iii) sont vérifiées</u>

Pour iv), on a $\forall t \geqslant a, \forall x \geqslant 0, \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \dfrac{-x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}$ or $t \geqslant a \Rightarrow_{-x^2\leqslant 0} -tx^2 \leqslant -ax^2 \Rightarrow e^{-tx^2} \leqslant e^{-ax^2}$

En multipliant par $\dfrac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{x^2}{1+x^2}e^{-ax^2} \leqslant e^{-ax^2} = \Psi(x)$ car $\dfrac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1$

Alors Ψ est C^0 et positive sur $[0,+\infty[$ et Ψ intégrable sur $[0,+\infty[$ si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Psi(x)\mathrm{d}x$ CV. Deux arguments sont possibles :

- soit par changement de variable en posant $x = \sqrt{a}t$ dans l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ qui CV

- soit par critère d'équivalence : $x^2\Psi(x) = x^2e^{-ax^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée puisque $a > 0$

Alors : $\begin{cases} 0 \leqslant \Psi(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \text{ CV} \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \Psi(x)\mathrm{d}x$ CV par domination puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Psi(x)\mathrm{d}x$ CV (continuité sur $[0,1]$)

<u>Conclusion</u> : Ainsi, puisque i),ii),iii) et iv) sont vraies, on peut conclure que $\boxed{h \text{ est de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ pour tout réel } a > 0}$

<u>Autre domination possible</u> : $\dfrac{x^2}{1+x^2} \leqslant x$ car $\dfrac{x^2}{1+x^2} - x = \dfrac{x(-x^2+x-1)}{1+x^2} \leqslant 0$ vu que le discriminant de $-x^2+x-1$ est < 0

On peux donc dominer par : $\Psi(x) = xe^{-ax^2}$ dont on peut prouver l'intégrabilité par un calcul de primitive :

$\displaystyle\int_0^A xe^{-ax^2}dx = \left[\frac{e^{-ax^2}}{-2a}\right]_0^A = \frac{1-e^{-aA^2}}{2a} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2a}$ donc Ψ est C^0, $\geqslant 0$ et intégrable sur $[0,+\infty[$

b. Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$

La dérivabilité est une propriété locale aussi :
h est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a>0 \Rightarrow$ $\boxed{h \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$ car $\displaystyle\bigcup_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[$

4. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+$ et, en déduire que, pour tout réel positif t : $0\leqslant h(t)\leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Le théorème de dérivation donne aussi : $\forall t>0,\ h'(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = -\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}dx$

Par positivité de l'intégrale puique $\dfrac{x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}\geqslant 0$ pour tout $(x,t)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a : $-h'(t)\geqslant 0 \Rightarrow h'(t)\leqslant 0$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$. De ce fait : $\forall t\geqslant 0$, $\dfrac{\pi}{2}=h(0)\geqslant h(t)$ et, par positivité puisque $f(x,t)\geqslant 0$, on aussi : $h(t)\geqslant 0$

Ainsi : $\boxed{0\leqslant h(t)\leqslant \dfrac{\pi}{2} \text{ pour tout } t\geqslant 0}$

OU BIEN : on a déjà démontré dans la question 2, lors de la domination(preuve de iii) que : $\forall(x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ 0<f(x,t)\leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$
d'où aussi le résultat, par croissance de l'intégrale en intégrant pour $x\in[0,+\infty[$ à $t\geqslant 0$ fixé (toutes les intégrales sont bien convergentes)

5. Montrer que h vérifie, pour $t>0$, l'équation différentielle (E) : $h'(t)-h(t)=-\dfrac{I}{\sqrt{t}}$

Pour $t>0$: $h'(t)-h(t) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}e^{-tx^2}dx - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{-(1+x^2)}{1+x^2}e^{-tx^2}dx$ Au moins 2 des 3 intégrales convergent

Ainsi : $h'(t)-h(t)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$ Par changement de variable $u=\sqrt{t}x$ (nouvelle variable u, ancienne variable x, à $t>0$ fixé)

$u=\sqrt{t}x$ $\quad du=\sqrt{t}dx$ $\quad x\,\Big|\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix}$ $\quad t\,\Big|\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix}$ car $\sqrt{t}>0$

$x=\dfrac{u}{\sqrt{t}}=\varphi(u)$ où φ est une application de classe C^1, strictement croissante (car $\sqrt{t}>0$) donc bijective de $[0,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$.
Le changement de variables est possible, et l'intégrale de départ étant convergente, on peut écrire :
$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{t}}=\frac{I}{\sqrt{t}}$ où toutes les intégrales sont convergentes et I est l'intégrale dont on veut déterminer la valeur.

En définitive, $\boxed{h \text{ vérifie, pour } t>0 \text{, l'équation différentielle (E) : } h'(t)-h(t)=-\dfrac{I}{\sqrt{t}}}$

6. a. Donner la solution générale, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

On a : (E_0) : $h'(t)-h(t)=0$ qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène donc l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(h_0)$ où $h_0(t)=e^{-(-t)}=e^t$.
Ainsi, $\boxed{\text{la solution générale, sur } \mathbb{R}_+^*\text{, de l'équation homogène } (E_0) \text{ associée à (E) est } [t\mapsto Ce^t] \text{ où } C\in\mathbb{R}}$

b. Soit $t_0>0$. À l'aide d'une intégrale, exprimer la primitive s'annulant en t_0 de la fonction qui, à tous réel $t>0$, associe $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$

Par quotient, $\left[g:t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right]$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc, d'après le théorème fondamentale d'existence des primitives, on sait que
$\boxed{\left[G:t\mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right] \text{ est la primitive sur }]0,+\infty[\text{ s'annulant en } t_0}$

c. Soit $t_0>0$. Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $t>0$, $h(t)=\left(k-I\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right)e^t$ $\quad(*)$

Pour finaliser la résolution de (E), on utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une solution h_p sous la forme $h_p(t)=C(t)h_0(t)$ avec $h_0(t)=e^t$ et C dérivable sur $]0,+\infty[$

$\forall t>0,\ h_p'(t)-h_p(t)=-\dfrac{I}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow \forall t>0,\ C'(t)h_0(t)+C(t)\underbrace{\left(h_0'(t)-h_0(t)\right)}_{=0}=-\dfrac{I}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow \forall t>0,\ C'(t)=-I\times\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}=\left(-I\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right)'$

(en utilisant la primitive introduite en 6a)

Alors $C(t)=-I\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$ convient soit $h_p(t)=-Ie^t\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$.

L'ensemble des solutions de (E) est $h_p+\mathrm{Vect}(h_0)$ d'où : $\boxed{\exists k\in\mathbb{R},\forall t>0}$, $h(t)=ke^t+h_p(t) \Leftrightarrow$ $\boxed{h(t)=\left(k-I\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du\right)e^t}$

7. a. Montrer que pour tout $t>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est convergente et que : $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Comme $\left[g : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right]$ est continue sur $]0,+\infty[$, elle l'est aussi sur $]0,t]$ pour $t>0$: le problème de convergence est en 0.

On obtient la convergence avec le théorème de changement de variables : $u = x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{u}$ $\quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$ $\quad \begin{array}{c|c} u & t \\ & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & \sqrt{t} \\ & 0 \end{array}$

Ici : $x=\varphi(u)$ où $[\varphi : u \mapsto \sqrt{u}]$ est de classe C^1, strictement croissante donc bijective de $]0,t]$ dans $]0,\sqrt{t}]$ aussi le théorème s'applique et on sait que $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\times 2\mathrm{d}u$ ont la même nature et, si elles convergent, elles seront égales.

Or, la seconde intégrale est convergente puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[0,\sqrt{2}]$.

On a donc bien justifié que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \text{ est convergente et : } \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x}$

b. En faisant tendre t vers 0 dans $(*)$, donner une expression de k à l'aide d'une intégrale, et en déduire que pour tout $t \geqslant 0$

$$h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)e^t$$

Le premier membre de $(*)$ tend vers $h(0) = \dfrac{\pi}{2}$ lorsque t tend vers 0 par continuité de h en 0 (prouvé en 2).

Le second membre de $(*)$ tend vers $\displaystyle\left(k - \mathrm{I}\int_{t_0}^0 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right)\times 1 = k + \mathrm{I}\int_0^{t_0}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ car l'intégrale est convergente (d'après 7a)

On a donc : $\displaystyle\frac{\pi}{2} = k + \mathrm{I}\int_0^{t_0}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{\pi}{2} - \mathrm{I}\int_0^{t_0}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$. En substituant la valeur de k trouvée dans $(*)$, on a, pour $t>0$:

$$h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{I}\int_0^{t_0}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u - \mathrm{I}\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right)e^t \Leftrightarrow h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{I}\int_0^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right)e^t \Leftrightarrow \boxed{h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)e^t} \quad \text{avec 7a)}$$

avec la relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^{t_0}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u + \int_{t_0}^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \int_0^{t}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

8. Montrer que, pour tout réel positif t : $\displaystyle 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}e^{-t}$

On a vu à la question 4, que, pour tout réel positif t :

$$0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)e^t \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}e^{-t}} \quad \text{en divisant par } e^t > 0$$

9. En déduire la valeur de I.

Lorsque $t \to +\infty$, puisque $\dfrac{\pi}{2}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, on sait par encadrement que $\displaystyle\frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\pi}{4\mathrm{I}}$

Or, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{I}$ converge, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mathrm{I}$.

Par unicité de la limite, on a : $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{4\mathrm{I}} \Leftrightarrow \mathrm{I}^2 = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{I} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$ puisque $\mathrm{I} \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

Troisième partie : étude d'un système dynamique aléatoire

Un système dynamique connaît trois états nommés A, B et C et trois seulement, s'excluant mutuellement autrement dit il est forcément dans l'un de ces trois états et il n'est pas possible qu'il soit en même temps dans deux de ces états en même temps. A chaque instant, il peut changer d'état selon la règle :

- s'il est dans l'état A, il passe à l'état B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou à l'état C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
- s'il est dans l'état B, il passe de façon équiprobable à l'un des états A, B ou C
- s'il est dans l'état C, il passe à l'état A avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ ou à l'état B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$

Pour tout entier naturel n, on note A_n (resp B_n ou C_n) l'événement « le système est à l'état A (resp B ou C) à l'instant n » et on introduit $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$ les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n

1. a. Justifier que $\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements et, en déduire que $a_n + b_n + c_n = 1$

La première phrase signale qu'à l'instant n, le système se trouve dans l'un des états A, B ou C et seulement un donc :
- l'un des événements A_n ou B_n ou C_n est réalisé soit $\underline{A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega}$ car « le système se trouve dans l'un des trois états »
- les événements A_n, B_n et C_n sont deux à deux incompatibles ($A_n \cap B_n = \emptyset = A_n \cap C_n = B_n \cap C_n$) car « les états s'excluent mutuellement »
Par définition, $\boxed{\{A_n, B_n, C_n\} \text{ est donc un système complet d'événements}}$

On sait alors que $1 = P(\Omega) = P(A_n \cup B_n \cup C_n) = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = a_n + b_n + c_n$ par σ-additivité

b. Exprimer les trois règles de changement d'état du système à l'aide de probabilités faisant intervenir les événements A_n, B_n et C_n ainsi que A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1}

Les trois règles de changement d'état traduisent les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant A_n réalisé, B_{n+1} sera réalisé avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et C_{n+1} sera réalisé avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ soit

$$\boxed{P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3}} \quad \text{et on déduit que} \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - P_{A_n}(B_{n+1}) - P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$$

- sachant B_n réalisé, A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1} seront réalisés avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ soit

$$\boxed{P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3} = P_{B_n}(B_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1})}$$

- sachant C_n réalisé, A_{n+1} sera réalisé avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ et B_{n+1} sera réalisé avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ soit

$$\boxed{P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3}} \quad \text{et on déduit que} \quad P_{C_n}(C_{n+1}) = 1 - P_{C_n}(A_{n+1}) - P_{C_n}(B_{n+1}) = 0$$

c. Démontrer alors soigneusement que $a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$

On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet $\{A_n, B_n, C_n\}$:
$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{2}{3}$

d. Donner, sans justification, des relations analogues exprimant b_{n+1} et c_{n+1} à l'aide de a_n, b_n et c_n

De la même manière, on a :
$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3}$
$c_{n+1} = P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) = a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times 0$

$$\text{Ainsi :} \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$$

2. On considère la matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Justifier que M est diagonalisable. M est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable

b. Vérifier que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M.

En déduire, sans aucun calcul de déterminant, les trois valeurs propres de M

On vérifie que $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2 \\ 1+1+1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $u \neq \vec{0}$ est bien un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$

De même : $M\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $v \neq \vec{0}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = -\dfrac{2}{3}$

La matrice M est d'ordre 3 donc elle possède 3 valeurs propres (éventuellement complexes) λ_1, λ_2 et λ_3 et on sait que :
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(M) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \lambda_3 = \dfrac{1}{3} - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

OU BIEN (en anticipant 2.c) : Puisque M est symétrique réelle, $w = u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur propre de M et :

$M\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc w est un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 0$

$\boxed{\text{Les trois valeurs propres de M sont } \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\dfrac{2}{3} \text{ et } \lambda_3 = 0}$

c. Pourquoi $w = u \wedge v$ est aussi un vecteur propre de M ?

La matrice M étant symétrique réelle avec trois valeurs propres distinctes, on sait que les sous-espaces propres sont de dimension 1 et qu'ils sont orthogonaux entre eux.
En notant E_λ le sev propre de M associé à la valeur propre λ, on a, avec la question 2b : $E_1 = \mathrm{Vect}(u)$ $E_{\frac{2}{3}} = \mathrm{Vect}(v)$

aussi $w = u \wedge v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est orthogonal à u et v , dirige le sev E_0 soit $E_0 = \mathrm{Vect}(w)$

d. Réduire la matrice M en précisant la réduite D, la matrice de passage P associée ainsi que la relation liant M, D et P.

On connaît 3 vecteurs propres associés aux trois valeurs propres distinctes de M.

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}MP = D$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le sujet n'impose pas d'utiliser une matrice de passage orthogonale : il n'est pas nécessaire de normer les vecteurs.

3. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ Vérifier que $X_{n+1} = MX_n$ et en déduire X_n comme un produit matriciel faisant intervenir P, son inverse, X_0 et D. Il ne sera pas nécessaire de calculer explicitement ce produit matriciel.

En utilisant les relations de 1c et 1d, on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{2}{3}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n + \dfrac{1}{3}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{3}b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{X_{n+1} = MX_n}$$

En itérant la relation, on obtient : $X_n = MX_{n-1} = M^2X_{n-2} = \cdots = M^nX_0$
Or, M et D représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes où P est la matrice de passage aussi M^n et D^n représentent f^n dans ces même bases avec la même matrice de passage soit $P^{-1}M^nP = D^n \Leftrightarrow M^n = PD^nP^{-1}$
Finalement : $\boxed{X_n = PD^nP^{-1}X_0}$

4. On admet que $b_0 = \dfrac{1}{3}$ et que, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{a_0 - c_0}{2}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $c_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{c_0 - a_0}{2}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

Calculer b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n et B_{n+1} sont indépendants.

On sait que $a_n + b_n + c_n = 1$ aussi $b_n = 1 - (a_n + c_n) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \dfrac{1}{3}}$

puisque $a_n + c_n = \dfrac{1}{3} + \alpha + \dfrac{1}{3} - \alpha = \dfrac{2}{3}$ où $\alpha = \dfrac{a_0 - c_0}{2}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

Par définition : B_n et B_{n+1} sont indépendants $\Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{B}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}_{n+1}) \Leftrightarrow \mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{n+1})$

Avec les questions 1.b et le résultat précédent, on a bien : $\mathrm{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{B}_{n+1}) = \dfrac{1}{3} = \mathrm{P}(\mathrm{B}_{n+1})$ d'où $\boxed{\mathrm{B}_n \text{ et } \mathrm{B}_{n+1} \text{ sont indépendants}}$

5. On admet que les événements $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_n$ sont indépendants.

On note T_n l'événement « Le système passe à l'état B pour la première fois à l'instant n »

a. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

L'événement T_n sera réalisé lorsque

les événements B_i pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ ne sont pas réalisés et l'événement B_n est réalisé

soit $\overline{\mathrm{B}_0}$ est réalisé **et** $\overline{\mathrm{B}_1}$ est réalisé **et** … **et** $\overline{\mathrm{B}_{n-1}}$ est réalisé **et** B_n est réalisé donc $\mathrm{T}_n = \overline{\mathrm{B}_0} \cap \overline{\mathrm{B}_1} \cap \cdots \cap \overline{\mathrm{B}_{n-1}} \cap \mathrm{B}_n$

Par indépendance : $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_0}) \times \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_1}) \times \cdots \times \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}_{n-1}}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}_n) = \underbrace{\dfrac{2}{3} \times \cdots \times \dfrac{2}{3}}_{n \text{ fois}} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T}_n)$

On reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ aussi la série est bien convergente et :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{3} \times \frac{1-0}{1-\frac{2}{3}} = 1$ soit $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T}_n) = 1}$

c. En déduire qu'il est presque sûr que le système passe à l'état B à un certain moment lorsqu'on laisse fonctionner le système indéfiniment.

Les événements $(\mathrm{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont 2 à 2 incompatibles : le système ne peut pas être pour la première fois à l'état B à l'instant n et à l'instant $k \neq n$ donc T_n et T_k sont incompatibles. Dés lors, par σ-additivité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T}_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}_n\right)$

Ainsi, l'événement $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}_n$ est presque sûr or $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}_n$ est l'événement « au moins l'un des événements T_n est réalisé » qui traduit bien que le système passe au moins un fois à l'état B de façon presque sûr.

Remarques suite à la correction des copies

Pour obtenir un moyenne à 8,93 (mais une médiane à 8 !), je note le sujet sur 22,7 mais ça n'a rien de surprenant sur une épreuve de ce type.
Deux copies se détachent nettement du groupes réalisant une belle performance (13,7 et 13,8) devant 2 autres bonnes copies (11,8 et 11,5) puis 2 autres honorables (10,7 et 10,8). Enfin, une copie est à la moyenne d'épreuve à 9,1.
Ces 7 copies mis à part, les 8 autres copies font moins biens que la moyenne des candidats : trois copies (à 8 et 8,1) ne sont pas trop loin mais l'écart se creuse assez vite ensuite pour les 5 suivantes (en dessous de 7,5)

Première partie : Partie I du sujet maths B de 2021

J'ai évalué cette partie en m'appuyant sur les remarques du rapport de l'épreuve que vous pouvez trouver sur le site de la banque PT. Le sujet ne présente pas de question très difficile : beaucoup de questions sont directement du cours ou des questions d'application directe du cours. Il y a quelques questions de calcul mais sans difficultés excessives...C'est un sujet classant valorisant les étudiants qui connaissent le cours.
Pour les remarques question par question, je vous renvoie au rapport du concours que vous trouverez sur le site de la banque PT (très détaillé cette année là) que je vous encourage à lire vivement. J'ai retrouvé dans vos copies la plupart des erreurs pointées par le rapport qu'il faut donc éviter...

Je souligne toutefois :

- AFFIRMER n'est pas PROUVER Vous devez prouver vos résultats en vous appuyant sur les définitions et résultats du cours qu'il faut toujours mettre en avant dans votre rédaction...
- trop d'erreurs sur le calcul de dérivée impardonnable à ce niveau : $(\sin^2 t)'$ est du type $(u^2)' = 2u'u$ soit $(\sin^2 t)' = 2(\cos t)(\sin t)$
- trop d'étudiants ne savent pas encore que : $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est normal au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$
- il est regrettable de ne pas repérer les relations habituelles $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ et $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$
- beaucoup trop d'étudiants ne connaissent pas la définition « P est une matrice orthogonale »
  Je rappelle : $P \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow P^T P = I_3$ (vérification possible même si ce n'est pas forcément celle que je privilégie en général)
  $\Leftrightarrow$ les colonnes de P forment une base orthonormée càd $\|C_1\| = \|C_2\| = 1$, $C_1.C_2 = 0$ et $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$
- trop peu d'étudiants ont su reconnaître une matrice de rotation puis déterminer son axe et son angle alors que c'est un grand classique du cours
- la relation de changement de bases est trop souvent écrite « à l'envers » et le changement d'origine est très loin d'être maîtrisé par la majorité des étudiants...

Troisième partie : Un exercice de probabilité

N'oubliez jamais que les exercices ont pour principal objectif de vérifier la maîtrise du cours et des méthodes.
Autrement dit : **vos réponses doivent mettre en avant les définitions et les théorèmes du cours!**

1. a. Ce type de question a pour objectif de vérifier la définition de système complet d'événements aussi cette définition doit apparaître dans votre réponse :

$\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements si $\begin{cases} \text{les événements sont 2 à 2 incompatibles : } A_n \cap B_n = \emptyset = A_n \cap C_n = B_n \cap C_n \\ \text{l'un des événements se produit forcéement : } A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega \end{cases}$

Je vous renvoie vers le corrigé pour voir comment le texte de l'énoncé amène à obtenir ces propriétés sur les événements.

Écrire $A_n \cap B_n \cap C_n = \emptyset$ n'est pas utile et souligne plutôt des confusions sur les définitions (mélange entre événements indépendants et incompatibles...)

b. Trop d'étudiants mélangent $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$!

$P(A \cap B)$ est la probabilité que A et B se réalise <u>en même temps</u>

$P_A(B)$ est la probabilité que B se réalise sachant que A a été réalisé : il n'y as donc plus d'aléa sur A (il a été réalisé!) mais uniquement sur B

Ici, il fallait traduire les trois règles avec des probabilités conditionnelles. Donner des réponses « brutes » n'est pas satisfaisant : il faut justifier avec le texte les valeurs données (voir corrigé). En particulier, traduire habilement l'équiprobabilité de la règle N°2...

c. Il faut annoncer la propriété utilisée (ici la formule des probabilités totales) avec son hypothèse (à savoir qu'on l'applique avec le système complet d'événements trouvés en 1.a.) et formuler correctement la propriété...

d. Cette fois, on donne des réponses brutes sans justifications puisque c'est ce qui est demandé...

2. Cette question s'attelle à la réduction de la matrice M

a. M est une matrice symétrique <u>réelle</u> donc elle est diagonalisable. Ne pas oublier une partie des hypothèses!

b. Le calcul du polynôme caractéristique n'est pas attendu et c'est une perte de temps.

La définition de vecteurs propres n'est toujours pas complète :

$$u \text{ est vecteur propre de M lorsque } \exists \lambda \in \mathbb{R},\ Mu = \lambda u \ \underline{\text{et } u \neq 0}$$

On trouvait deux valeurs propres de M par du simple calcul matriciel et on obtenait la troisième à l'aide des propriétés liant la trace aux valeurs propres par exemple...

c. On ne demande de vérifier que $u \wedge v$ est un vecteur propre mais d'expliquer pourquoi il l'est...

Autrement dit, c'est dans la conclusion du théorème spectral qu'il faut aller piocher la réponse : les sev propres de M sont 2 à 2 orthogonaux et il sont de dimension 1 (car 3 valeurs propres simples)

d. L'ordre des valeurs propres sur la diagonales de la réduite D dépend de l'ordre des vecteurs propres comme colonne de la matrice P...

Attention, si vous ne normalisez pas les vecteurs de la base de diagonalisation, la formule de changement de base reste $P^{-1}MP = D$. Pour obtenir $P^T MP = D$, il faut utiliser $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 01 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ pour que P soit orthogonale.

3. La preuve $X_{n+1} = MX_n$ a été en général bien fait via le calcul du produit MX_n et l'utilisation des relations de 1c et 1d

Affirmer $X_n = M^n X_0$ sans argument est insuffisant. Dire qu'on procède par itération de la relation précédente est acceptable. De même, affirmer $M^n = PD^nP^{-1}$ sans argument est insuffisant...Il faut évoquer soit un argument de récurrence soit une formule de changement de bases (voir corrigé).

4. Là encore, une question où le principale objectif est de vérifier la définition de l'indépendance : il faut donc que la définition apparaisse dans votre réponse : il faut vérifier $P(B_n \cap B_{n+1}) = P(B_n)P(B_{n+1})$ ou encore $P_{B_n}(B_{n+1}) = P(B_{n+1})$

Des calculs souvent bien compliqués pour obtenir $b_n = \frac{1}{3}$: il suffisait d'utiliser les relations données et $b_n = 1 - a_n - c_n$

5. Du classique de proba dénombrable...

a. Une question où il s'agit d'exprimer T_n à l'aide des événements $(B_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ puis d'exploiter l'indépendance...Je vous renvoie au corrigé.

b. Le calcul de cette somme de série doit s'appuyer sur le cours : on reconnaît une série géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ avec $|q| < 1$ donc qui converge et on connaît la somme...

c. Il s'agissait de remarquer que les événements T_n sont, par construction, 2 à 2 incompatibles.

Aussi, on peut utiliser la sigma-additivé et le calcul précédent permet d'obtenir que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} T_n$ est presque-sûr conduisant à la conclusion attendue.

Deuxième partie : Partie II du sujet maths C de 2015

Globalement, vos performances sont très décevantes...Là encore, vous disposez du rapport de l'épreuve : attention, j'ai interverti l'ordre des questions 1 et 2 par rapport au sujet initial.

1. Plusieurs étudiants « prolongent par continuité en $+\infty$ » pour justifier la convergence de l'intégrale, est-ce bien sérieux?

Dans le corrigé, j'utilise un retour à la définition pour justifier la convergence mais on peut aussi prouver la convergence en s'appuyant sur le critère d'équivalence :

$\left[x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right]$ est continue sur $[0,+\infty[$ car $1+x^2>0$ donc il n'y a qu'un singularité en ∞ à étudier.

En $+\infty$: $\dfrac{1}{1+x^2} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ or $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\right]$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ vu que $\alpha = 2 > 1$

aussi, par critère d'équivalence, $\left[x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right]$ est intégrable en $+\infty$

Attention, ne pas oubliez l'hypothèse « signe constant » dans l'utilisation du critère d'équivalence (éventuellement via de l'intégrabilité ou de la CVA)

Je rappelle que $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\right]$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$ mais elle l'est sur $[\alpha,+\infty[$ pour tout $\alpha > 0$

2. Pensez à bien introduire vos notations si elles ne sont pas introduites par le sujet : il est utile ici d'introduire la fonction de deux variables $\left[f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\right]$ telle que $h(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$

Le gros piège ici est que le paramètre est t et la variable intégrée est x : les rôles sont échangés par rapport au cours...

et il va falloir en tenir compte dans les théorèmes...ce que vous ne faites pas en général!

Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre justifie aussi la définition : l'hypothèse 1) est l'argument de continuité et l'hypothèse 3) permet de justifier la convergence de l'intégrale par majoration. **L'étude de la définition de h en justifiant la convergence de l'intégrale $h(t)$ est une perte de temps!** D'autant plus que j'ai trop souvent lu des phrases « $h(t)$ est définie parce que $1+x^2 \neq 0$ sur $[0,+\infty[$ » semblant croire que l'argument de continuité serait suffisant pour assurer la convergence de l'intégrale...Est-ce bien sérieux?

Dans le même genre, « un produit de fonctions intégrables est intégrable » est totalement FAUX! Pour contre-exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{2}}}$ converge absolument mais $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ diverge.

Dans l'énoncé du théorème de continuité, certains exigent une intégrabilité qui n'est pas présente dans le théorème de continuité puisque la convergence de $h(t)$ est prise en charge par l'hypothèse de domination. L'hypothèse de domination est souvent mal formulée ou incomplète : il s'agit de majorer $|f(x,t)|$ (et pas seulement $f(x,t)$) indépendamment du paramètre (ici t) soit $|f(x,t)| \leqslant \varphi(x)$ pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$ (quantification souvent absente) où φ est une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$.

Dans vos justifications, l'argument de continuité est bien souvent « fumeux » : on ne sait pas si vous étudiez la continuité selon la variable x, la variable t ou les deux...de sorte que c'est totalement incompréhensible! De plus, quand vous proposez une domination, elle est donné en général « comme une évidence » sans aucune justification alors qu'elles sont bien souvent fausses! Je le répète : AFFIRMER N'EST PAS JUSTIFIER et, sans justification, les résultats ne sont pas pris en compte (cf préambule des sujets).

3. En général, la question est mieux traitée : le théorème et les hypothèses sont mieux mise en valeurs. Certains s'emmêlent toutefois en mélangeant les rôles de la variables intégrées (ici x) et du paramètre (ici t).

Beaucoup d'erreurs dans le calcul de la dérivée partielle!

La domination est en général mieux abordée : vous obtenez, en général, une majoration en partant de la contrainte mais vous peinez à justifier l'intégrabilité de votre dominante...

Attention : $[x \mapsto e^{-\alpha x^2}]$ pour $\alpha > 0$ n'est pas une fonction de référence du programme dont vous pouvez affirmez l'intégrabilité sans preuve. Le sujet donnait l'intégrabilité de $[x \mapsto e^{-x^2}]$ permettant d'obtenir celle de $[x \mapsto e^{-\alpha x^2}]$ par changement de variable mais on pouvait aussi utiliser une règle du o pour l'obtenir (voir corrigé).

Pour 3b), cette question « facile » est pourtant peu réussie : il s'agissait d'utiliser la caractère local de la dérivation (probablement à cause de révision insuffisante!).

4. En vous questionnant sur les variations de h, on vous questionne implicitement sur le signe de $h'(t)$. Il s'agissait donc d'expliciter $h'(t)$ en exploitant la conclusion du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. Même si vous n'avez pas réussi à justifier les hypothèses, vous pouvez quand même utiliser la conclusion et donner l'expression de $h'(t)$ sous forme d'une intégrale.

Le signe de $h'(t)$ s'obtient sans difficulté à l'aide des propriétés de l'intégrale (ici la positivité).

L'encadrement de $h(t)$ peut également s'obtenir à l'aide des propriétés de l'intégrale mais le sujet vous incitait plutôt à exploiter la monotonie de h pour la majoration (voir corrigé)

Noter qu'on ne vous demande pas le tableau de variation mais seulement le sens de variation : il n'y a avait aucune limite à rechercher en $+\infty$ (ni en 0 puisque h y est définie...)

5. Cette question difficile a été rarement abordée : comme vous pouvez le constater, le changement de variables n'est ni donné, ni même évoqué par le sujet...C'est une question pour départager les bonnes copies qu'il ne faut pas hésiter à passer !

6. Les questions 6a et 6b sont des questions de cours de première année mais qu'on a revu dans l'année.

En 6a, il s'agit de donner la solution homogène d'une EDL1 du type $y'(t) + a(t)y(t) = 0$.

En 6b, il s'agit d'invoquer le théorème d'existence des primitives (rarement nommé !) qui nécessite une hypothèse de continuité sur la fonction. Attention au choix de vos variables :

$$\text{la primitive de } f \text{ (continue sur I) s'annulant en } t_0 \text{ est F où } \mathrm{F}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s$$

Vous pouvez utiliser beaucoup de notation pour la variable intégrée s mais pas t ou t_0 qui ont déjà un rôle !

Certains ont tenté de calculer cette primitive ce qui est inutile et fait perdre du temps et de l'énergie vu que le sujet précise « à l'aide d'une intégrale exprimer la primitive ».

La question 6c n'a pratiquement jamais été traitée. On pouvait obtenir le résultat en mettant en place la méthode de variation de la constante (cf. correction) ou bien en remarquant que :

$$\left[h_p : t \mapsto -\mathrm{I}e^t \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u\right] \text{ est solution particulière sur }]0,+\infty[\text{ de } y' - y = -\frac{1}{\sqrt{t}}$$

En effet, h_p est bien dérivable sur $[0,+\infty[$ (produit de exp et de la primitive G de la question 6b) et :

$$h_p'(t) = -\mathrm{I}\big(e^t\mathrm{G}(t) + e^t\mathrm{G}'(t)\big) = \underbrace{-\mathrm{I}e^t\mathrm{G}(t)}_{=h_p(t)} - \mathrm{I}\times e^t \times \frac{e^t}{\sqrt{t}} = h_p(t) - \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{t}} \quad \text{soit} \quad h_p'(t) - h_p(t) = -\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{t}}$$

Or, l'ensemble des solutions de $y' - y = -\dfrac{\mathrm{I}}{\sqrt{t}}$ est de la forme $\quad h_p + \mathrm{Vect}([t \mapsto e^t])$

Puisque h est une solution : $\exists k \in \mathbb{R}$ avec $h(t) = h_p(t) + ke^t$ pour $t > 0$ soit le résultat espéré.

7. Lisez bien la question 7a : l'intégrabilité en $+\infty$ n'est absolument pas demandé puisqu'il s'agit de justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{t_0} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ qui ne présente qu'une singularité en 0...Les arguments pour justifier la convergence sont bien souvent inutilement compliqué : $\quad \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \sim_{u\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{u}} = \dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}}$ or $\left[u \mapsto \dfrac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\right]$ est une fonction de Riemann intégrable en 0 car $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$

La suite de la question nécessite encore un changement de variables qui n'est toujours pas donné ni annoncé...mais il est cette fois suggéré pas l'égalité à trouver.

La question 7b n'a quasiment jamais été abordée : la méthode (faire tendre t vers 0 dans $(*)$) est donnée donc il suffit de l'appliquer en justifiant la valeurs des limites avec les résultats des différentes questions du sujet. Cette question est prenable à condition de ne pas se décourager et de bien faire le bilan des questions précédentes

8. De même, cette question est triviale en réunissant les résultats de la question 4 et de la question 7b. Malheureusement, vous êtes très nombreux à avoir déjà baissé les bras depuis bien longtemps...

9. Là encore, une question peu difficile : l'encadrement précédent invite à passer à la limite lorsque t tend vers $+\infty$. Le rapport souligne que la majorité des candidats traitent la question ! Ce n'est pas le cas dans la classe : dois-je en déduire que vous manquez de combativité ?