Lycée Paul Constans

Année 2024/2025

Classe de PT

Concours Blanc de Mathématiques

Durée : 4 heures - La calculatrice n'est pas autorisée.

Voici le préambule présent sur chacun des sujets de mathématiques recopié à l'identique.
Les mots en gras sont donc ceux pointés par le jury du concours.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ce sujet est constituée de deux parties indépendantes qui seront évaluées pour une part à peu près égale dans la notation.

La première partie est la première partie du sujet Maths B de 2021. **Ne pas traiter les questions n° 2 et n° 5 de cette partie**

La seconde partie est le deuxième partie du sujet Maths C de 2015

La troisième partie est un exercice de probabilité type Maths A.

Chacune des parties comptera pour une part égale dans l'évaluation finale de la copie.

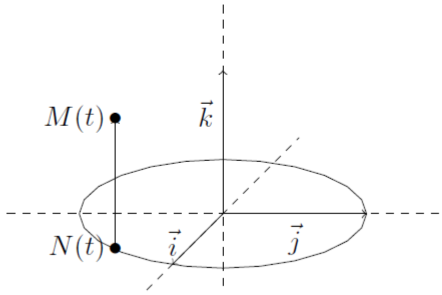
<u>Première Partie</u> : Partie I du sujet maths B de 2021

Modélisation d'un manège de chevaux de bois.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Un manège pour enfant est constitué d'un cheval de bois tournant autour de l'axe du manège et animé d'un mouvement vertical.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et on suppose que les coordonnées du point $M(t)$ sont
$$\left(\cos t, \sin t, \frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{2}\right)$$



On note $\mathscr{C}$ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.
Pour tout réel t, on appelle vecteur vitesse au point $M(t)$ le vecteur $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ et vecteur accélération au point $M(t)$ le vecteur $\vec{A}(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)$. On note $V(t)$ et $A(t)$ les normes des vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{A}(t)$.

1. a. Démontrer que tous les points de $\mathscr{C}$ sont réguliers.

b. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point $M(t)$ où $t \in \mathbb{R}$

c. Dans le cas particulier $t = \dfrac{\pi}{3}$, donner une équation du plan passant pas $M(t)$ et orthogonal à la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(t)$

2. **Ne traiter cette question que si tous le reste a été traité!**

a. Déterminer $V(t)$ et $A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b. Pour quelles valeurs de t, $V(t)$ est-elle minimale? maximale?

c. Vérifier que $V(t)$ est minimale lorsque $A(t)$ est maximale. Que peut-on dire de la direction du vecteur $\vec{V}(t)$ dans ce cas?

3. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ est incluse dans la surface Σ d'équation $x^2 + y^2 = 1$

4. Le propriétaire du manège souhaite construire un toit incliné au dessus de son manège. Pour en connaître la forme, il fait l'intersection de la surface Σ avec le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $z = 3 - \dfrac{3}{4}y$.

Une représentation cartésienne du bord du toit est donc $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 - \dfrac{3}{4}y \end{cases}$. On note $\mathscr{BT}$ cette courbe

a. Donner un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{BT}$ au point de coordonnées $(1, 0, 3)$

b. Donner un vecteur <u>unitaire</u> normal au plan $\mathscr{Q}$: $\dfrac{3}{4}y + z - 3 = 0$

c. On considère la matrice $P = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

i. Démontrer que la matrice P est orthogonale.

ii. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice P.
Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

d. On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs $\quad \vec{u} = \frac{1}{5}(-4\vec{\jmath} + 3\vec{k})$, $\quad \vec{v} = \vec{\imath} \quad$ et $\quad \vec{w} = \frac{1}{5}(3\vec{\jmath} + 4\vec{k})$.

Sans calcul supplémentaire, justifier que $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ est une base orthonormée directe.

e. On note Ω le point de coordonnées $(0, 0, 3)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit M un point de $\mathbb{R}^3$. On note (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, (x_1, y_1, z_1) ses coordonnées dans le repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et (X, Y, Z) ses coordonnées dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

i. Quelle relation existe-t-il entre les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$?

ii. Démontrer que dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, une représentation cartésienne de $\mathscr{BT}$ est $\begin{cases} 16X^2 + 25Y^2 = 25 \\ Z = 0 \end{cases}$

iii. En déduire la nature de $\mathscr{BT}$

5. $\boxed{\textbf{Ne traiter cette question que si tous le reste a été traité!}}$

Suite à une erreur de montage, le support du cheval de bois, c'est à dire la droite $(N(t)M(t))$, n'est plus vertical mais incliné. A l'instant $t = 0$, ce support, noté Δ_λ a pour équations cartésiennes $\begin{cases} x = \lambda z \\ y = 1 + \lambda z \end{cases}$ où λ est un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$

a. Déterminer une équation de la surface de révolution S_λ obtenue en faisant tourner la droite Δ_λ autours de l'axe (Oz).

b. Justifier que S_λ est une surface réglée.

c. Le propriétaire du manège souhaite désormais savoir quelle sera la forme du bord de son nouveau toit, noté $\mathscr{BT}_\lambda$ obtenu en faisant l'intersection de S_λ et du plan $\mathscr{Q}$ défini dans la question 4.

On admet que dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, une représentation cartésienne de $\mathscr{BT}_\lambda$ est

$$\begin{cases} \frac{2}{25}(8 - 9\lambda^2)X^2 - \frac{2\lambda}{25}(18\lambda + 15)X + Y^2 = 18\lambda^2 + 6\lambda + 1 \\ Z = 0 \end{cases}$$

A quel type de conique, la courbe $\mathscr{BT}_\lambda$ appartient-elle ?

<u>Deuxième partie</u> : Partie II du sujet maths C de 2015

On rappelle que l'intégrale $\quad \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad$ est convergente. L'objectif de la partie est de calculer la valeur de I.

Pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose : $\quad h(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ et calculer sa valeur.

2. Montrer que h est définie et continue sur $[0,+\infty[$. Que vaut $h(0)$?

3. a. Soit a un réel strictement positif. Montrer que h est dérivable sur $[a,+\infty[$.

b. Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$

4. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+$ et, en déduire que, pour tout réel positif t : $0 \leqslant h(t) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

5. Montrer que h vérifie, pour $t > 0$, l'équation différentielle (E) : $h'(t) - h(t) = -\dfrac{\mathrm{I}}{\sqrt{t}}$

6. a. Donner la solution générale, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

b. Soit $t_0 > 0$. À l'aide d'une intégrale, exprimer la primitive s'annulant en t_0 de la fonction qui, à tous réel $t > 0$, associe $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$

c. Soit $t_0 > 0$. Montrer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $t > 0$, $h(t) = \left(k - \mathrm{I}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)e^t \quad (*)$

7. a. Montrer que pour tout $t > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est convergente et que : $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

b. En faisant tendre t vers 0 dans $(*)$, donner une expression de k à l'aide d'une intégrale, et en déduire que pour tout $t \geqslant 0$

$$h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)e^t$$

8. Montrer que, pour tout réel positif t : $\quad 0 \leqslant \dfrac{\pi}{2} - 2\mathrm{I}\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}e^{-t}$

9. En déduire la valeur de I.

Troisième partie : étude d'un système dynamique aléatoire

Un système dynamique connaît trois états nommés A, B et C et trois seulement, s'excluant mutuellement autrement dit il est forcément dans l'un de ces trois états et il n'est pas possible qu'il soit en même temps dans deux de ces états en même temps. A chaque instant, il peut changer d'état selon la règle :

- s'il est dans l'état A, il passe à l'état B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou à l'état C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
- s'il est dans l'état B, il passe de façon équiprobable à l'un des états A, B ou C
- s'il est dans l'état C, il passe à l'état A avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ ou à l'état B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$

Pour tout entier naturel n, on note A_n (resp B_n ou C_n) l'événement « le système est à l'état A (resp B ou C) à l'instant n »
et on introduit $a_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$, $b_n = \mathrm{P}(\mathrm{B}_n)$ et $c_n = \mathrm{P}(\mathrm{C}_n)$ les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n

1. **a.** Justifier que $\{\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n\}$ est un système complet d'événements et, en déduire que $a_n + b_n + c_n = 1$

b. Exprimer les trois règles de changement d'état du système à l'aide de probabilités faisant intervenir les événements A_n, B_n et C_n ainsi que A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1}

c. Démontrer alors soigneusement que $a_{n+1} = \frac{1}{3} b_n + \frac{2}{3} c_n$

d. Donner, sans justification, des relations analogues exprimant b_{n+1} et c_{n+1} à l'aide de a_n, b_n et c_n

2. On considère la matrice $\mathrm{M} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Justifier que M est diagonalisable.

b. Vérifier que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M.

En déduire, sans aucun calcul de déterminant, les trois valeurs propres de M

c. Pourquoi $w = u \wedge v$ est aussi un vecteur propre de M ?

d. Réduire la matrice M en précisant la réduite D, la matrice de passage P associée ainsi que la relation liant M, D et P.

3. On pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ Vérifier que $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{X}_n$ et en déduire X_n comme un produit matriciel faisant intervenir P, son inverse, X_0 et D. Il ne sera pas nécessaire de calculer explicitement ce produit matriciel.

4. On admet que $b_0 = \frac{1}{3}$ et que, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{1}{3} + \frac{a_0 - c_0}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et $c_n = \frac{1}{3} + \frac{c_0 - a_0}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Calculer b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n et B_{n+1} sont indépendants.

5. On admet que les événements $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$ sont indépendants.

On note T_n l'événement « Le système passe à l'état B pour la première fois à l'instant n »

a. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

b. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{T}_n)$

c. En déduire qu'il est presque sûr que le système passe à l'état B à un certain moment lorsqu'on laisse fonctionner le système indéfiniment.