PT 2024-2025 : Correction du DM nº 7

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \text{ et } a_0 = a_1 = 1$$

1. Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1\leqslant a_n\leqslant n^2$.

On mène une récurrence double avec l'hypothèse HR_n : $1\leqslant a_n\leqslant n^2$

- *Initialisation* : $1\leqslant a_1\leqslant 1^2$ donc HR_1 vraie $\quad a_2 = a_1 + \frac{2}{1}a_0 = 3$ donc $1\leqslant a_2\leqslant 2^2$ donc HR_2 vraie

- *Hérédité* : On prouve $\left(\mathrm{HR}_{n-1} \text{ et } \mathrm{HR}_n\right)\Rightarrow \mathrm{HR}_{n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

On sait : $1\leqslant a_{n-1}\leqslant (n-1)^2 \quad 1\leqslant a_n\leqslant n^2$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$ On veut $1\leqslant a_{n+1}\leqslant (n+1)^2$

Prouvons le : $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}\geqslant 1 + \frac{2}{n+1}\times 1\geqslant 1$ et $a_{n+1}\leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2$

<u>idée</u> : lorsqu'on veut montrer que $\alpha\leqslant\beta$, il est plus simple de vérifier $\beta-\alpha\geqslant 0$

or $n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 - (n+1)^2 = n^2 + \frac{2(n^2-2n+1)}{n+1} - (n^2+2n+1) = \frac{2(n^2-2n+1)-(2n+1)(n+1)}{n+1} = \frac{-n+1}{n+1}\leqslant 0$ si $n\in\mathbb{N}^*$

donc on a bien : $a_{n+1}\leqslant (n+1)^2$

- *Conclusion* : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 1\leqslant a_n\leqslant n^2$ par récurrence simple sur n

2. En déduire le rayon R de convergence de la série entière.

On utilise le résultat de cours :

si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence R_a et R_b avec $a_n\leqslant b_n$ à partir d'un certain rang alors $R_a\geqslant R_b$

Ici, on a $1\leqslant a_n\leqslant n^2$ donc :

- le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ est inférieur à celui de $\sum x^n$ qui vaut 1 soit : $R\leqslant 1$
- le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum n^2 x^n$ qui vaut aussi 1 soit : $R\geqslant 1$

En définitive, on a donc $\boxed{R=1}$

3. Montrer que la somme S de cette série vérifie une EDL_1 sans second membre sur $]-R,R[$.

On cherche une EDL1 sur S donc une équation entre $S(x)$ et $S'(x)$

On a : $\forall x\in]-1,1[,\quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

Or, en multipliant par $n+1$ dans la relation de récurrence, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad (n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n + 2a_{n-1} \Rightarrow (n+1)a_{n+1}x^n = (n+1)a_n x^n + 2a_{n-1}x^n$$

En sommant pour n de 1 (attention, relation valable pour $n\in\mathbb{N}^*$) à $+\infty$ et sous réserve d'existence :

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n}_{=S'(x)-a_1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n = x\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}n a_n x^{n-1}}_{=S'(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x^n}_{=S(x)-a_0} + 2x\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^{n-1}}_{S(x)}$$

Attention, il faut compenser l'absence des premiers termes dans les sommes !

L'existence de tous les termes est assuré dans $]-1,1[$ puisqu'on identifie soit la somme $S(x)$ soit la dérivée terme à terme $S'(x)$ qui sont des sommes de séries entières convergentes (même rayon de convergence $R=1$ pour la série entière et pour la dérivée terme à terme)

Finalement : $S'(x)-1 = xS'(x) + S(x) - 1 + 2xS(x)$ soit $\boxed{S \text{ solution de } (1-x)y' = (2x+1)y \text{ avec } S(0) = a_0 = 1}$

4. Déterminer S.

S est l'unique solution d'un problème de Cauchy du premier ordre.

On résout sur $]-1;1[$ où $1-x\neq 0$ (équation résolue) : $y' - \frac{2x+1}{1-x}y = 0$ Ici : $a(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1} = (2x+3\ln|x-1|)'$

L'ensemble des solutions de cette EDL1 homogène est $\mathrm{Vect}(h)$ avec $h(x) = e^{-\left(2x+3\ln|x-1|\right)} = e^{-2x}e^{-\ln(1-x)^3} = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$

$n\ln a = \ln(a^n)$ pour $a>0$ et $|1-x| = 1-x$ sur $]-1,1[$

d'où $\exists C\in\mathbb{R},\forall x\in]-1,1[\quad S(x) = \frac{C}{(x-1)^3}e^{-2x}$ mais $S(0)=1 \Leftrightarrow C=-1$ d'où $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\ S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}}$