PT 2024-2025 : Correction du DM n° 6

Soit $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \text{si } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

et on note $\|.\|$ la norme associée. On considère le sous-espace vectoriel $\quad H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\right\}$

1. Rappeler, sans démonstration, les propriétés permettant de vérifier que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.

Il s'agit de vérifier que

- (forme) $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\langle P, Q\rangle$ existe et c'est un réel
- (symétrique) $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$
- (bilinéaire) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé, $[Q \mapsto \langle P, Q\rangle]$ et $[Q \mapsto \langle Q, P\rangle]$ sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$

  Lorsque le caractère symétrique a été prouvé, on ne prouve que la linéarité de $[Q \mapsto \langle P, Q\rangle]$ soit :
  $\forall (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_n[X], \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \langle P, \alpha Q_1 + Q_2\rangle = \alpha \langle P, Q_1\rangle + \langle P, Q_2\rangle$
- (positif) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, P\rangle \geqslant 0$
- (défini) Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0$

2. Démontrer que $\quad \dim H = n \quad$ sans chercher à expliciter une base de H.

Méthode n° 1 : H est caractérisée par une équation linéaire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ où $(a_0, \ldots, a_n)$ sont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ aussi H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc $\dim H = \dim \mathbb{R}_n[X] - 1 = (n+1) - 1 = \boxed{n = \dim H}$

Méthode n° 2 : $\quad H = \operatorname{Ker} \varphi$ où $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ donné par : $\varphi(P) = P(1)$
Comme φ n'est pas nulle ($\varphi(1) = 1$), son image, incluse dans $\mathbb{R}$ et de dimension supérieure à 1 vaut forcément $\operatorname{Im} m\varphi = \mathbb{R}$
Dès lors, par le théorème du rang, $\dim H = \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Im} m\varphi = (n+1) - 1 = n$

3. Dans cette question seulement $n = 3$. On pose $\quad P_1 = X - 1, \quad P_2 = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \quad$ et $\quad P_3 = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$

a. Prouver que (P_1, P_2, P_3) est une base orthogonale de H.

• On vérifie d'abord que c'est une famille de polynômes de H : $\quad \forall i \in [\![1, 3]\!], \quad \deg(P_i) \leqslant 3 \quad$ et
$P_1(1) = 1 - 1 = 0, \quad P_2(1) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0 \quad$ et $\quad P_3(1) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = 0$ donc les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont dans H
• On vérifie ensuite que c'est une famille orthogonale :
$\langle P_1, P_2\rangle = 0 - \dfrac{1}{2} + (-1) \times -\dfrac{1}{2} = 0, \quad \langle P_1, P_3\rangle = 0 + 0 - \dfrac{1}{3} - (-) \times \dfrac{1}{3} = 0 \quad$ et $\quad \langle P_2, P_3\rangle = 0 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} = 0$
• Puisque (P_1, P_2, P_3) est orthogonale, (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
• (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de H avec $\operatorname{Card}(P_1, P_2, P_3) = 3 = \dim H$ donc c'est une base de H
Finalement, $\boxed{(P_1, P_2, P_3) \text{ est une base orthogonale de H}}$

b. En déduire la distance du polynôme constant $R = 1$ à H.

On sait que la distance de 1 à H est $d(R, H) = \|R - p(R)\|$ où $p(R)$ est la projection orthogonale de $R = 1$ sur H.
On construit facilement une base orthonormée de H en normant les vecteurs de la base orthogonale (P_1, P_2, P_3) :
$(E_1, E_2, E_3) = \left(\dfrac{P_1}{\|P_1\|}, \dfrac{P_2}{\|P_2\|}, \dfrac{P_3}{\|P_3\|}\right)$ est une base orthonormée de H et alors : $\quad P(1) = \langle R, E_1\rangle E_1 + \langle R, E_2\rangle E_2 + \langle R, E_3\rangle E_3$
soit : $P(R) = \dfrac{\langle R, P_1\rangle}{\|P_1\|^2} P_1 + \dfrac{\langle R, P_2\rangle}{\|P_2\|^2} P_2 + \dfrac{\langle R, P_3\rangle}{\|P_3\|^2} P_3 = \dfrac{-1}{2}(X - 1) + \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}) + \dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}(X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}) = -\dfrac{1}{4}X^3 - \dfrac{1}{4}X^2 - \dfrac{1}{4}X + \dfrac{3}{4}$
Puis : $\|R - P(R)\| = \|\frac{1}{4}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}\| = \dfrac{1}{4}\sqrt{4 \times 1^2} = \boxed{\dfrac{1}{2} = d(R, H)}$

c. Vérifier que $N = 1 + X + X^2 + X^3$ est normal à H

Méthode 1 : On vérifie que $< N, P_1 >= 0 =< N, P_2 >=< N, P_3 >$ et donc $N \in H^{\perp}$ or $\dim(H^{\perp}) = 1$ donc N dirige bien la droite vectoriel $H^{\perp}$ et c'est donc, par définition, un vecteur normal de H
Méthode 2 : On cherche une équation de H dans la base orthonormée $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$:
$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in H \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Leftrightarrow 1 \times a_0 + 1 \times a_1 + 1 \times a_2 + 1 \times a_3 = 0 \Leftrightarrow < N, P >= 0$
On a bien trouvé une équation de H puisque (a_0, a_1, a_2, a_3) sont les coordonnées de P dans $(1, X, X^2, X^3)$ et on sait que $N = 1 + X + X^2 + X^3$ est un vecteur normal à H

d. Retrouver la distance de $R = 1$ à H en utilisant le polynôme N

On peut alors choisir un vecteur N_1 normal et unitaire de H : $N_1 = \frac{N}{\|N\|} = \dfrac{N}{\sqrt{1 + 1 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{2}N$
En notant $p_{H^{\perp}}(R)$ le projeté orthogonal de R sur $H^{\perp}$, on a :
$d(R, H) = \|p_{H^{\perp}}(R)\| = \|< R, N_1 > N_1\| = \left| < R, N_1 > \right| \|N_1\| = \left|\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0\right| \times 1 = \dfrac{1}{2}$

4. On revient dans le cas général où n est un entier naturel quelconque.

a. On pose $\mathrm{Q}_k = \mathrm{X}^k - 1$ pour $k \in [\![1,n]\!]$. Vérifier que $(\mathrm{Q}_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une base de H qui n'est pas orthogonale.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Q}_k(1) = 1-1 = 0 \Rightarrow \mathrm{Q}_k \in \mathrm{H}$ et $\deg(\mathrm{Q}_k) = k$ d'où $0 < \deg(\mathrm{Q}_1) < \deg(\mathrm{Q}_2) < \cdots < \deg(\mathrm{Q}_n)$
La famille $(\mathrm{Q}_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre (car famille de polynômes non nuls à degrés 2 à 2 distincts) de H
et $\mathrm{Card}\Big((\mathrm{Q}_k)_{k\in[\![1,n]\!]}\Big) = n = \dim \mathrm{H}$ donc $\boxed{(\mathrm{Q}_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \text{ est une base de H}}$

Comme $\langle \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2\rangle = \big\langle \mathrm{X}-1, \mathrm{X}^2-1\big\rangle = 0+0+1 \neq 0$ $\boxed{\text{ce n'est pas une base orthogonale}}$

b. Déterminer la projection orthogonale du polynôme constant 1 sur H en utilisant la base précédente mais sans chercher à la transformer en une base orthonormée.

On ne dispose pas d'une base orthonormée mais d'une base quelconque de H.
On utilise la caractérisation de la projection orthogonale $p(\mathrm{R})$ par : $p(\mathrm{R}) \in \mathrm{H}$ et $\mathrm{R} - p(\mathrm{R}) \in \mathrm{H}^{\perp}$

Méthode n° 1 : On cherche $\mathrm{P(R)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ où $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec :
$\mathrm{P(R)} \in \mathrm{H} \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$ (évaluation en 1 nulle)
$\mathrm{R} - \mathrm{P(R)} \in \mathrm{H}^{\perp} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \langle \mathrm{R} - \mathrm{P(R)}, \mathrm{Q}_k\rangle = 0 \Leftrightarrow \big\langle -a_n\mathrm{X}^n \cdots - a_1\mathrm{X} + (1-a_0), \mathrm{X}^k - 1\big\rangle = 0 \Leftrightarrow -a_k - (1-a_0) = 0 \Leftrightarrow a_k = a_0 - 1$

Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = 0 \Leftrightarrow a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow (n+1)a_0 - n = 0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{n}{n+1}$

Finalement : $p(\mathrm{R}) = \displaystyle\frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{n}{n+1} - 1\Big)\mathrm{X}^k = \boxed{\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\big(\mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \cdots + \mathrm{X}^n\big) = p(\mathrm{R})}$

Méthode n° 2 : On cherche $\mathrm{P(R)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathrm{Q}_i$ où $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ puisque $\mathrm{P(R)} \in \mathrm{H} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_n)$ et

$\mathrm{R} - \mathrm{P(R)} \in \mathrm{H}^{\perp} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \langle \mathrm{R} - \mathrm{P(R)}, \mathrm{Q}_k\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], \langle \mathrm{R}, \mathrm{Q}_k\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{Q}_i, \mathrm{Q}_k\rangle$

Or : $\langle \mathrm{R}, \mathrm{Q}_k\rangle = 1 \times (-1) = -1$ et $\langle \mathrm{Q}_i, \mathrm{Q}_k\rangle = (-1)(-1) = 1$ si $i \neq k$ et $\langle \mathrm{Q}_k, \mathrm{Q}_k\rangle = (-1)(-1) + 1 \times 1 = 2$

$$\text{Aussi : } \mathrm{R} - \mathrm{P(R)} \in \mathrm{H}^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -1 \\ \vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + 2\alpha_n = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = -1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \vdots \\ \alpha_n - \alpha_1 = 0 \quad \mathrm{L}_n \leftarrow \mathrm{L}_n - \mathrm{L}_1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n \text{ et } (n+1)\alpha_1 = -1$$

Finalement : $p(\mathrm{R}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{n+1}\Big)(\mathrm{X}^k - 1) = \boxed{\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\big(\mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \cdots + \mathrm{X}^n\big) = p(\mathrm{R})}$

Remarque : on retrouve $\mathrm{P(R)} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}(\mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X}^3)$ dans le cas $n = 3$...

c. Quel théorème du cours permettrait d'obtenir une base orthonormée de H ?
Décrire la méthode sur les 3 premières étapes sans faire les calculs de produits scalaires.

Il suffit d'appliquer $\boxed{\text{l'algorithme de Gram-Schmidt}}$ sur cette base $(\mathrm{Q}_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de H
On construit les 3 premiers vecteurs de la base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de la façon suivante :

$\varepsilon_1 = \dfrac{\mathrm{Q}_1}{\|\mathrm{Q}_1\|}$ $\quad \varepsilon_2 = \dfrac{\mathrm{U}_2}{\|\mathrm{U}_2\|}$ où $\mathrm{U}_2 = \mathrm{Q}_2 - <\mathrm{Q}_2, \varepsilon_1> \varepsilon_1$ $\quad \varepsilon_3 = \dfrac{\mathrm{U}_3}{\|\mathrm{U}_3\|}$ où $\mathrm{U}_3 = \mathrm{Q}_3 - <\mathrm{Q}_3, \varepsilon_1> \varepsilon_1 - <\mathrm{Q}_3, \varepsilon_2> \varepsilon_2$