Devoir maison n° 6

« *J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes*

comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. »

STENDHAL (1783-1842), écrivain français

Soit $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de son produit scalaire canonique :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \text{si } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

et on note $\|.\|$ la norme associée. On considère le sous-espace vectoriel $\quad H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\right\}$

1. Rappeler, sans démonstration, les propriétés permettant de vérifier que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire.

2. Démontrer que $\quad \dim H = n \quad$ sans chercher à expliciter une base de H.

3. Dans cette question seulement $n = 3$. On pose $\quad P_1 = X - 1, \quad P_2 = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} \quad$ et $\quad P_3 = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$

- **a.** Prouver que (P_1, P_2, P_3) est une base orthogonale de H.
- **b.** En déduire la distance du polynôme constant $R = 1$ à H.
- **c.** Vérifier que $N = 1 + X + X^2 + X^3$ est normal à H
- **d.** Retrouver la distance de $R = 1$ à H en utilisant le polynôme N

4. On revient dans le cas général où n est un entier naturel quelconque.

- **a.** On pose $\quad Q_k = X^k - 1 \quad$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Vérifier que $(Q_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une base de H qui n'est pas orthogonale.
- **b.** Déterminer la projection orthogonale du polynôme constant 1 sur H en utilisant la base précédente mais sans chercher à la transformer en une base orthonormée.
- **c.** Quel théorème du cours permettrait d'obtenir une base orthonormée de H ?
  Décrire la méthode sur les 3 premières étapes sans faire les calculs de produits scalaires.