PT 2024-2025 : Correction du DM n° 5

Je vous propose de faire en DM l'exercice n°6 de la feuille d'exercices du chapitre VII avec un énoncé plus détaillé :

Un petit problème *Durée conseillée : 1h30*

On pose : $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ où x est un nombre réel.

1. Justifier la définition de f sur $\mathbb{R}_+^*$ autrement dit prouver la convergence de l'intégrale $f(x)$ pour $x>0$ fixé.
Peut-on définir f pour $x=0$?

• Pour $x>0$ fixé, $\left[\varphi : t\mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}\right]$ est C^0 sur $[x,+\infty[$ puisque $t^2\neq 0$ et :
$\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ mais $\left[t\mapsto\dfrac{1}{t^2}\right]$ est intégrable sur $[x,+\infty[$ (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha=2>1$) donc $\left[t\mapsto\dfrac{\sin t}{t^2}\right]$ est aussi intégrable sur $[x,+\infty[$.
Ainsi, l'intégrale $f(x)$ est converge pour tout $x>0$ $\boxed{\text{ce qui assure la définition de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

• Pour définir $f(x)$ pour $x=0$, il faudrait vérifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t$. On a déjà vu que φ est continue sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est intégrable en $+\infty$. Il s'agit donc d'étudier la convergence au voisinage de 0.
Au voisinage de 0 : $\dfrac{\sin t}{t^2}\sim_0\dfrac{t}{t^2}=\dfrac{1}{t}>0$ aussi $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^1\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ a la même nature que $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc elle est divergente.
Puisque l'intégrale $f(1)$ est convergente, $\boxed{\text{l'intégrale } f(0)=\mathrm{J}+f(1) \text{ est divergente}}$ et $\boxed{f \text{ ne peut pas être définie pour } x=0}$

2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$. *On pourra utiliser la relation de Chasles et introduire une primitive.*

Pour $x>0$, on écrit, avec la relation de Chasles : $f(x)=\displaystyle\int_x^1\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=-\int_1^x\varphi(t)\mathrm{d}t+f(1)$
Mais φ est continue sur $]0,+\infty[$ donc on peut introduire une primitive Φ de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et on a :
$f(x)=-[\Phi(x)]_1^x+f(1)=\underbrace{f(1)+\Phi(1)}_{\text{constante}}-\Phi(x)$ de sorte que $\boxed{f \text{ est bien de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$
De plus : $\forall x>0,\quad f'(x)=-\Phi'(x)=\boxed{-\dfrac{\sin(x)}{x^2}=f'(x)}$

3. a. Démontrer que : $\forall x>0,\quad f(x)+\ln(x)=f(1)-\displaystyle\int_x^1\frac{t-\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$

On sait que $\ln x=\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}$ aussi on a $f(x)+\ln x=\left(f(1)-\displaystyle\int_1^x\varphi(t)\mathrm{d}t\right)+\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}=f(1)+\int_1^x\left(\frac{1}{t}-\frac{\sin t}{t^2}\right)\mathrm{d}t=f(1)-\int_x^1\frac{t-\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$

b. Justifier que $\mathrm{K}=\displaystyle\int_0^1\frac{t-\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

$\left[t\mapsto\dfrac{t-\sin t}{t^2}\right]$ est C^0 sur $]0,1]$ où $t^2\neq0$ et, au voisinage de 0 : $\dfrac{t-\sin t}{t^2}\sim_0\dfrac{\frac{t^3}{6}}{t^2}\sim_0\dfrac{t}{6}\xrightarrow[t\to0]{}0$
On peut donc prolonger par continuité et l'intégrale est faussement généralisée en 0 de sorte que $\boxed{\mathrm{K}\text{ converge}}$

c. Justifier alors que $f(x)+\ln x$ a une limite finie lorsque $x\to0^+$

Il s'agit de montrer que l'expression $f(x)+\ln x=f(1)-\displaystyle\int_x^1\frac{t-\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque $x\to0^+$ ce qui revient à établir que $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1\frac{t-\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$ soit que l'intégrale $\mathrm{K}=\displaystyle\int_0^1\frac{t-\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et $\mathrm{K}=\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1\frac{t-\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$
En passant à la limite, on a : $\boxed{f(x)+\ln x\xrightarrow[x\to0^+]{}f(1)-\mathrm{K}=\ell\in\mathbb{R}\text{ donc }\boxed{f(x)+\ln x\text{ admet une limite finie lorsque } x\to0^+}}$

4. a. En intégrant deux fois par parties, démontrer que : $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}+\dfrac{2\sin x}{x^3}-\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{6\sin t}{t^4}\mathrm{d}t$

On réalise une première IPP dans $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t$ avec $\begin{vmatrix}u'(t)=\sin t\\ v(t)=\dfrac{1}{t^2}\end{vmatrix}$ soit $\begin{vmatrix}u(t)=-\cos t\\ v'(t)=-\dfrac{2}{t^3}\end{vmatrix}$ où u et v sont C^1 sur $[x,+\infty[$
Sous réserve que c'est possible : $f(x)=\left[-\dfrac{\cos t}{t^2}\right]_x^{+\infty}-\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{2\cos t}{t^3}\mathrm{d}t$
$\left[-\dfrac{\cos t}{t^2}\right]_x^{+\infty}=\displaystyle\lim_{t\to+\infty}-\frac{\cos t}{t^2}+\frac{\cos x}{x^2}=0+\frac{\cos x}{x^2}$ car $0\leqslant\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{t^2}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ et l'intégrale initiale $f(x)$ est convergente
donc l'IPP est possible puisqu'on a la convergence de 2 termes sur les trois : $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}-\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{2\cos t}{t^3}\mathrm{d}t$

On fait une nouvelle IPP avec $\begin{vmatrix}u'(t)=2\cos t\\ v(t)=\dfrac{1}{t^3}\end{vmatrix}$ soit $\begin{vmatrix}u(t)=2\sin t\\ v'(t)=-\dfrac{3}{t^4}\end{vmatrix}$ où u et v sont C^1 sur $[x,+\infty[$
Sous réserve que c'est possible : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{2\cos t}{t^3}\mathrm{d}t=\left[\frac{2\sin t}{t^3}\right]_x^{+\infty}-\int_x^{+\infty}-\frac{6\sin t}{t^4}\mathrm{d}t$
$\left[\dfrac{2\sin t}{t^3}\right]_x^{+\infty}=\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sin t}{t^3}-\frac{2\sin x}{x^3}=-\frac{2\sin x}{x^3}$ car $0\leqslant\left|-\dfrac{2\sin t}{t^3}\right|\leqslant\dfrac{2}{t^3}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$
et d'autre part on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{2\cos t}{t^3}\mathrm{d}t$ est convergente avec la première IPP.
L'IPP est possible et on a finalement : $\boxed{f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}+\dfrac{2\sin x}{x^3}-\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{6\sin t}{t^4}\mathrm{d}t}$

b. Établir alors que $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{\frac52}}\right)$

Il s'agit donc désormais de démontrer que $f(x)-\dfrac{\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin x}{x^3}-\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{6\sin t}{t^4}\mathrm{d}t=o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{\frac52}}\right)$

autrement dit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\frac{\cos x}{x^2}}{\frac{1}{x^{\frac52}}}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}x^{\frac52}\left|f(x)-\frac{\cos x}{x^2}\right|=0$

Or : $x^{\frac52}\left|f(x)-\dfrac{\cos x}{x^2}\right|=x^{\frac52}\left|\dfrac{2\sin x}{x^3}-\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{6\sin t}{t^4}\mathrm{d}t\right|\leqslant x^{\frac52}\frac{2|\sin x|}{x^3}+\left|\int_x^{+\infty}\frac{6\sin t}{t^4}\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2|\sin x|}{\sqrt{x}}+x^{\frac52}\int_x^{+\infty}\frac{6|\sin t|}{t^4}\mathrm{d}t$
en exploitant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ puis pour les intégrales généralisées. C'est possible car l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{6\sin t}{t^4}\mathrm{d}t$ est absolument convergente puisque $\left|\dfrac{6\sin t}{t^4}\right|\leqslant\dfrac{6}{t^4}$ et que $\left[t\mapsto\dfrac{6}{t^4}\right]$ est intégrable sur $[x,+\infty[$
Ainsi, en majorant $|\sin x|\leqslant1$ et $|\sin t|\leqslant1$, et par croissance de l'intégrale : $x^{\frac52}\left|f(x)-\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x}}+x^{\frac52}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^4}\mathrm{d}t$
Or : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^4}\mathrm{d}t=\left[-\frac{3}{t^3}\right]_x^{+\infty}=\frac{3}{x^3}$ aussi $x^{\frac52}\left|f(x)-\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ soit $\boxed{f(x)-\dfrac{\cos x}{x^2}=o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{\frac52}}\right)}$

5. Démontrer enfin, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer I.

$[x\mapsto xf(x)]$ est C^0 sur $]0,+\infty[$ puisque la fonction f y est de classe C^1 d'après la question 2.
On réalise une IPP avec $\begin{vmatrix}u(x)=f(x)\\ v'(x)=x\end{vmatrix}$ soit $\begin{vmatrix}u'(x)=-\dfrac{\sin x}{x^2}\\ v(x)=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}$ où u et v sont bien C^1 sur $]0,+\infty[$
$\big[u(x)v(x)\big]_0^{+\infty}=\left[\dfrac{x^2}{2}f(x)\right]_0^{+\infty}$ D'après 4 : $\dfrac{x^2}{2}f(x)=\dfrac12\cos x+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ n'a pas de limite en $+\infty$
Lorsque la partie intégrée diverge, on peut réaliser l'IPP sur un segment et passer ensuite aux limites
Toutefois, si on réalise l'IPP sur $[\varepsilon,\mathrm{A}]\subset]0,+\infty[$, on a :
$\mathrm{I}(\varepsilon,\mathrm{A})=\displaystyle\int_\varepsilon^{\mathrm{A}}xf(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]_\varepsilon^{\mathrm{A}}-\int_\varepsilon^{\mathrm{A}}\frac{x^2}{2}\times-\frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{A}^2}{2}f(\mathrm{A})-\frac{\varepsilon^2}{2}f(\varepsilon)+\frac12\int_\varepsilon^{\mathrm{A}}\sin x\mathrm{d}x$
$=\dfrac{\mathrm{A}^2}{2}f(\mathrm{A})-\dfrac{\varepsilon^2}{2}f(\varepsilon)-\dfrac12\cos\mathrm{A}+\dfrac12\cos(\varepsilon)$
D'après 3 : $f(\varepsilon)+\ln\varepsilon=o_0(\ln\varepsilon)$ donc $\dfrac{\varepsilon^2}{2}f(\varepsilon)\sim_{\varepsilon\to0}-\dfrac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon\xrightarrow[x\to0]{}0$ soit $\dfrac{\varepsilon^2}{2}f(\varepsilon)=o_{\varepsilon\to0}(1)$
D'après 4 : $\dfrac{\mathrm{A}^2}{2}f(\mathrm{A})=\dfrac12\cos\mathrm{A}+o_{\mathrm{A}\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}\right)$ aussi $\mathrm{I}(\varepsilon,\mathrm{A})=\dfrac12\cos\varepsilon+o_{\varepsilon\to0}(1)+o_{\mathrm{A}\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}\right)$
Ainsi, si $\varepsilon\to0$ et $\mathrm{A}\to+\infty$, on a : $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0,\mathrm{A}\to+\infty}\int_\varepsilon^{\mathrm{A}}xf(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0,\mathrm{A}\to+\infty}\mathrm{I}(\varepsilon,\mathrm{A})=\frac12\times1+0+0=\frac12$
On peut donc conclure, en revenant à la définition, que $\boxed{\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\text{ est convergente avec }\quad\mathrm{I}=\frac12}$