Pour le 27/01/2025 Lycée Paul Constans Classe PT

DEVOIR MAISON N° 5

« *L'étude des mathématiques est comme le Nil qui commence en modestie et finit en magnificence.* »

Charles Caleb Colton (1777-1832), écrivain anglais.

Je vous propose de faire en DM l'exercice n°6 de la feuille d'exercices du chapitre VII avec un énoncé plus détaillé :

Un petit problème *Durée conseillée : 1h30*

On pose : $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ où x est un nombre réel.

1. Justifier la définition de f sur $\mathbb{R}_+^*$ autrement dit prouver la convergence de l'intégrale $f(x)$ pour $x > 0$ fixé.
Peut-on définir f pour $x = 0$?

2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$. *On pourra utiliser la relation de Chasles et introduire une primitive.*

3. a. Démontrer que : $\forall x > 0, \quad f(x) + \ln(x) = f(1) - \displaystyle\int_x^1 \frac{t - \sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

b. Justifier que $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t - \sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

c. Justifier alors que $f(x) + \ln x$ a une limite finie lorsque $x \to 0^+$

4. a. En intégrant deux fois par parties, démontrer que : $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} + \dfrac{2\sin x}{x^3} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{6\sin t}{t^4}\,\mathrm{d}t$

b. Établir alors que $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right)$

5. Démontrer enfin, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et calculer I.