EXERCICE N° 6 On considère la courbe Γ : $\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$

1. Construire la courbe Γ

On notera $\quad M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ le point de paramètre t de la courbe Γ.

Définition/Domaine d'étude :
x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ puisque $\operatorname{ch} t \neq 0$ pour t réel aussi $[t \mapsto M(t)]$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour t réel, $\operatorname{ch}(-t) = \operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh}(-t) = -\operatorname{sh}(t)$ de sorte que $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ aussi les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à $O + \mathrm{Vect}(\vec{j})$ et la courbe possède l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

On peut étudier les variations uniquement sur $[0, +\infty[$

Variations communes : x et y sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$x'(t) = 1 - \dfrac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = 1 - 1 + \dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}$

aussi : $\quad x'(t) \geqslant 0 \quad$ et $\quad x'(t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$y'(t) = -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$ a le signe et les zéros de $-\operatorname{sh} t$ soit :

$y'(t) \leqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0 \quad$ et $\quad y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$x(0) = 0 - \dfrac{0}{1} = 0 \quad$ et $\quad y(0) = \dfrac{1}{1} = 1$

Limite :

$\operatorname{ch} t \sim_{+\infty} \dfrac{e^t}{2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \sim_{+\infty} \dfrac{\frac{e^t}{2}}{\frac{e^t}{2}} \sim_{+\infty} 1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$

d'où $\quad x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ par somme

t	0	$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$
x	0 ↗	$+\infty$
y	1 ↘	0
$y'(t)$	0	$-$

Branche infinie : Pour $t \to +\infty$, l'axe des abscisses est une asymptote horizontale et la courbe reste au dessus de cette asymptote.

Point stationnaire : Le point de paramètre $t = 0$ est stationnaire : $\quad y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{1}{1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3)} = \dfrac{1}{1 + u(t)}$

où $\quad u(t) = \dfrac{t^2}{2} + o(t^3) \sim \dfrac{t^2}{2} \quad$ or $\quad \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o(u) \quad$ donc $\quad \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = 1 - \left(\dfrac{t^2}{2} + o(t^3)\right) + \underbrace{o\big(u(t)\big)}_{=o(t^2)} = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ et pas $o(t^3)$ à ce stade!

En effet, on rappelle que : $\quad o\big(u(t)\big) = u(t)\varepsilon\big(u(t)\big) \quad$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0 \quad$ et $\quad u(t) \sim_0 \dfrac{t^2}{2} \Leftrightarrow u(t) = \dfrac{t^2}{2}\theta\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$ où $\theta(x) \xrightarrow[x\to0]{} 1$

Aussi : $\quad o\big(u(t)\big) = \dfrac{t^2}{2}\theta\left(\dfrac{t^2}{2}\right)\varepsilon\big(u(t)\big) = t^2 \times \tilde{\varepsilon}(t) \quad$ où $\tilde{\varepsilon}(t) = \dfrac{1}{2}\theta\left(\dfrac{t^2}{2}\right)\varepsilon\big(u(t)\big) \xrightarrow[t\to0]{} \dfrac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0 \quad$ C'est donc ce $o(t^2)$ qui l'emporte sur le $o(t^3)$!

Est-ce utile d'être plus précis sur le DL de $\dfrac{1}{1+u}$? On sait que $\quad \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$

Le terme $\quad (u(t))^2 = \left(\dfrac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^2 = \dfrac{t^4}{4} + o(t^4) \quad$ est « avalé » par le $o(t^3)$ du terme en $u(t)$

Le $o\Big(\big(u(t)\big)^2\Big)$ est un $o(t^4)$ qui est aussi « avalé » par le $o(t^3)$ du terme en $u(t)$

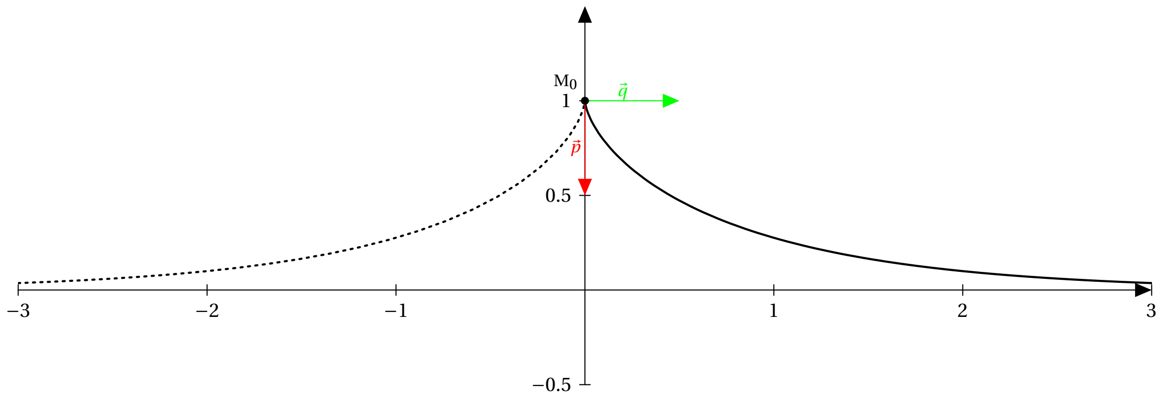
On gagne donc un peu de précision : $\quad \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^3) \quad$ (à la place de $o(t^2)$) mais on pouvait obtenir cette précision plus simplement par parité :

Par parité de y, il n'y a pas de termes à l'ordre 3 dans le DL soit : $\quad y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)$

Ensuite : $\quad x(t) = t - \operatorname{sh} t \times \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = t - \left(t + \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)\right)\left(1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)\right) = t - \left(t - \dfrac{t^3}{2} + \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)$

Alors : $\quad \overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$

La première dérivée non nulle s'obtient pour $p = 2$ et la tangente en $M(0) = (0, 1)$ est verticale (selon $(0, -1)$)
La dérivée suivante non colinéaire est pour $q = 3$ et donc $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.



2. Montrer que $x'(t)^2+y'(t)^2=\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}$ puis déterminer le repère de Frenet en un point régulier.

En utilisant toujours $\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$ et $\operatorname{ch} t>0$ on a, pour tout t réel :
$\|M'(t)\|^2=x'(t)^2+y'(t)^2=\dfrac{\operatorname{sh}^4 t}{\operatorname{ch}^4 t}+\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^4 t}=\dfrac{\operatorname{sh}^2 t(\operatorname{sh}^2 t+1)}{\operatorname{ch}^4 t}=\dfrac{\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^4 t}=\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}$ d'où $s'(t)=\|M'(t)\|=\left|\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right|=\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{ch} t}$
Le point est régulier lorsque $M'(t)\neq\vec{0}\Leftrightarrow t\neq 0$ Le sujet demande implicitement de préciser les points réguliers...
et alors, par définition : $\vec{T}=\dfrac{M'(t)}{\|M'(t)\|}$ et $\vec{N}$ directement orthogonal à $\vec{T}$
Or $M'(t)=\left(\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t};-\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\right)$ aussi $\boxed{\vec{T}=\left(\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{ch} t};-\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t}\right)\text{ et }\vec{N}=\left(\dfrac{|\operatorname{sh}(t)|}{\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t};\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{ch} t}\right)\text{ lorsque } t\neq 0}$ $x^2=|x|^2$ d'où $\dfrac{x^2}{|x|}=|x|$...

3. Déterminer alors le rayon de courbure en un point régulier.

On utilise les formules de Frenet : $\dfrac{d\vec{T}}{ds}=\dfrac{1}{R}\vec{N}\Leftrightarrow\dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{d\vec{T}}{dt}=\dfrac{1}{R}\vec{N}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\|M'(t)\|}\dfrac{d\vec{T}}{dt}=\dfrac{1}{R}\vec{N}$ où R est le rayon de courbure
Pour s'affranchir de la valeur absolue, on distingue $t>0$ et $t<0$
Si $t>0$: $\vec{T}=\left(\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t};-\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\right)\Rightarrow\dfrac{d\vec{T}}{dt}=\left(\dfrac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t};\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\right)=\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t};\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\right)\Rightarrow\dfrac{1}{\|M'(t)\|}\dfrac{d\vec{T}}{dt}=\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t};\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\right)=\dfrac{1}{\operatorname{sh} t}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} t};\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right)$
d'où $\boxed{R=\operatorname{sh} t\quad\text{si } t>0}$. Il suffit, en pratique, de calculer et comparer une seule des coordonnées.
Si $t<0$: $\vec{T}=\left(-\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t};\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\right)$ donc il suffit de multiplier par -1 dans le calcul précédent soit : $R=-\operatorname{sh} t$.
Ainsi, on peut conclure que : $\boxed{R=|\operatorname{sh} t|\quad\text{lorsque } t\neq 0}$

4. Déterminer la développée de Γ à l'aide du rayon de courbure.

La développée est le lieu des centres de courbure : $\Gamma_D=\left\{C\ \middle|\ \overrightarrow{OC}(t)=\overrightarrow{OM}(t)+R\vec{N}\text{ pour } t\neq 0\right\}$
Or $\vec{N}=\left(\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t};\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{ch} t}\right)$ et $R=|\operatorname{sh} t|$ d'où $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}t-\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\\ \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\end{pmatrix}+|\operatorname{sh} t|\begin{pmatrix}\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t}\\ \dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{ch} t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \dfrac{1+\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \operatorname{ch} t\end{pmatrix}$ pour $t\neq 0$
Ainsi, $\boxed{\text{la développée de }\Gamma\text{ est la courbe représentative de la fonction ch privé du point }(0,1)}$

5. En remarquant que la normale à Γ en un point régulier est dirigée par $\vec{n}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\operatorname{sh} t}\\ 1\end{pmatrix}$, déterminer la développée d'une autre façon en utilisant un calcul d'enveloppe.

Comme $\vec{N}=\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{ch} t}\vec{n}$, le vecteur $\vec{n}$ dirige bien la normale à Γ en un point régulier (càd $t\neq 0$).
La développée est l'enveloppe des normales $\mathscr{D}_t=M(t)+\operatorname{Vect}(\vec{n}(t))$ avec $M(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ pour $t\neq 0$.
C'est la courbe régulière décrite par le point $C(t)$ telle que $\mathscr{D}_t$ est la tangente à la courbe au point $C(t)$ aussi
i) $C(t)\in\mathscr{D}_t$ donc : $\overrightarrow{OC}(t)=\overrightarrow{OM}(t)+\lambda(t)\vec{n}(t)$ avec $\lambda:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ de classe C^1
ii) $\dfrac{d\overrightarrow{OC}}{dt}$ et $\vec{n}(t)$ sont colinéaires soit
$$\det\left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt},\vec{n}(t)\right)=0\Leftrightarrow\det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt},\vec{n}(t)\right)+\lambda'(t)\times\underbrace{\det(\vec{n}(t),\vec{n}(t))}_{=0}+\lambda(t)\det(\vec{n}'(t),\vec{n}(t))=0$$
Comme $\det(\vec{n}'(t),\vec{n}(t))=\begin{vmatrix}-\frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}^2 t} & \frac{1}{\operatorname{sh} t}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\neq 0,$
$$\lambda(t)=-\frac{\det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt},\vec{n}(t)\right)}{\det(\vec{n}'(t),\vec{n}(t))}=\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\begin{vmatrix}\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} & \frac{1}{\operatorname{sh} t}\\ -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} & 1\end{vmatrix}=\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\left(\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}+\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right)=\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\times\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}=\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}$$
de sorte que : $\overrightarrow{OC}(t)=\begin{pmatrix}t-\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\\ \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}\end{pmatrix}+\dfrac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\operatorname{sh} t}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t-\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}+\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\\ \dfrac{1+\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \dfrac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch} t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\ \operatorname{ch} t\end{pmatrix}$ pour $t\neq 0$.
On retrouve que $\boxed{\text{la développée de }\Gamma\text{ est la courbe représentative de la fonction ch privé du point }(0,1)}$

Étude de la courbe paramétrée (question 1)

Bien souvent, le signe et les zéros des dérivées sont peu voir pas justifiés. Les limites en $+\infty$ de x et y le sont encore moins!
La nature de la branche infinie a été souvent oublié (càd l'asymptote horizontale d'équation $y=0$) bien que représentée sur le dessin.
Il y avait une subtilité dans le calcul du DL de $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ pour bien justifier un $o(t^3)$ (voir la correction largement détaillée).
Pensez bien à rédiger : j'ai lu trop de rédaction "light" se contentant de donner p, q et la nature du point...Là encore, les valeurs de p, q se justifient (voir rédaction en 2 lignes sur le corrigé)
Concernant le dessin proprement dit : n'oubliez pas d'indiquer vos unités et vos tangentes ne sont, en général, pas assez « marquées » càd que vos courbes ne sont pas vraiment tangentes aux tangentes particulières (horizontales et verticales) que vous signalez.

Développée la courbe par la courbure (questions 2,3 et 4)

Vous êtes très (trop!) nombreux à oublier les valeurs absolues : $s'(t)=\sqrt{\left(\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right)^2}=\left|\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right|=\dfrac{|\operatorname{sh} t|}{\operatorname{ch} t}$
Veillez à ce que vos notations $f(t)$, $s'(t)$, $\mathrm{M}(t)$, γ, R, $\ldots$ soient bien définies (soit par le sujet soit par vos soins)
Attention, les calculs sont réalisés uniquement aux points réguliers (càd pour $t\neq 0$)
Signalez que vous utilisez « une formule de Frenet » comme on signale le théorème de Pythagore, de Thales ou les formules d'Euler...
Rappeler la définition utilisée de la développée : c'est le lieu des centres de courbures soit $\Gamma_{\mathrm{D}}=\left\{\mathrm{C}\mid \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\mathrm{R}\overrightarrow{\mathrm{N}}\right\}$

Développée la courbe par l'enveloppe des normales (question 5)

Le « En remarquant » du sujet est une question implicite : vous devez justifier cette affirmation en montrant, par exemple, que $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires OU BIEN que $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
N'oubliez pas là encore de donner la caractérisation de la développée : c'est l'enveloppe des normales à la courbes. Il s'agit donc de :

1. définir les normales à la courbe Γ aux points réguliers. Bien souvent, je vois apparaître des droites $\mathscr{D}_t$ mais elles ne sont nulle par définies : $\mathscr{D}_t=\mathrm{M}(t)+\mathrm{Vect}\big(\vec{n}(t)\big)$ est la normale à Γ en $\mathrm{M}(t)$.
2. caractériser géométriquement que cette normale est la tangente à la développée càd $\mathscr{D}_t$ coïncide avec la droite $\mathrm{C}(t)+\mathrm{Vect}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\mathrm{d}t}\right)$ lorsque $\mathrm{C}(t)$ est le point courant de la développée et donc $\left[t\mapsto\overrightarrow{\mathrm{OC}}(t)\right]$ un paramétrage de celle-ci. L'égalité des droites s'obtient car :
   - **a.** $\mathrm{C}(t)$ est un point de $\mathscr{D}_t$ donc : $\exists\lambda(t)\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}(t)=\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)+\lambda(t)\vec{n}(t)$
   - **b.** les deux vecteurs $\vec{n}(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\mathrm{d}t}$ dirigent tous les deux $\mathscr{D}_t$ donc sont colinéaires soit $\det\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\mathrm{d}t},\vec{n}(t)\right)=0$