EXERCICE N° 1 **_Étude d'une famille de séries_**

On fixe un paramètre $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et on considère le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\alpha n+1}$

**1.** Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.

Puisque $\alpha > 0$, $\alpha n+1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la série $\sum u_n$ est une série alternée (i).

Par ailleurs : $|u_n| = \dfrac{1}{\alpha n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (ii) et la suite $\left(|u_n|\right) = \left(\dfrac{1}{\alpha n+1}\right)$ est une suite décroissante (iii)

Les propositions (i),(ii) et (iii) permettent de conclure que $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$ d'après le théorème des séries alternées.

**2.** Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t$

**Pour les 3/2**, puisque $\alpha n$ est un entier naturel, $[t \mapsto t^{\alpha n}]$ est continue sur $[0,1]$ et, en utilisant un calcul de primitive :

$$\int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha n+1}}{\alpha n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{\alpha n+1}}{\alpha n+1} - \frac{0^{\alpha n+1}}{\alpha n+1} = \frac{1}{\alpha n+1}$$ vu que $\alpha n+1 > 0$ et, par suite : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t}$

**Pour les 5/2 (et bientôt les 3/2)**, lorsque $\alpha$ est un réel, $t^{\alpha n} = e^{\alpha n \ln t}$, l'intégrale est donc généralisée en 0. On doit donc justifier la convergence de l'intégrale : la fonction $[g_n : t \mapsto t^{\alpha n}]$ est continue sur $]0,1]$ et $g_n(t) = t^{\alpha n} = e^{\alpha n \ln t} \xrightarrow[t\to0^+]{} 0$ aussi elle est prolongeable par continuité et c'est une intégrale faussement généralisée. Le calcul de primitive reste valable :

$$\int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha n+1}}{\alpha n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{\alpha n+1}}{\alpha n+1} - \lim_{t\to0^+}\frac{t^{\alpha n+1}}{\alpha n+1} = \frac{1}{\alpha n+1} - 0 = \frac{1}{\alpha n+1}$$ puisque $t^{\alpha n+1} = e^{\overbrace{(\alpha n+1)}^{>0}\ln t} \xrightarrow[t\to0^+]{} 0$

**3.** On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Vérifier que : $S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{\alpha k}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{\alpha k}\right)\mathrm{d}t$$ par linéarité de l'intégrale. or : $(-1)^k t^{\alpha k} = \left(-t^\alpha\right)^k$

On identifie donc une somme géométrique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-t^\alpha\right)^k = \frac{1-\left(-t^\alpha\right)^{n+1}}{1-\left(-t^\alpha\right)} = \frac{1-\left(-t^\alpha\right)^{n+1}}{1+t^\alpha}$

Dès lors : $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\left(-t^\alpha\right)^{n+1}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ puis $S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \int_0^1 \left(\frac{1-\left(-t^\alpha\right)^{n+1}}{1+t^\alpha} - \frac{1}{1+t^\alpha}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-\left(-t^\alpha\right)^{n+1}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

Or : $-\left(-t^\alpha\right)^{n+1} = -(-1)^{n+1}\left(t^\alpha\right)^{n+1} = -1 \times -1 \times (-1)^n t^{\alpha(n+1)} = (-1)^n t^{\alpha(n+1)}$ où $(-1)^n$ est une constante pour l'intégration

aussi, on a bien vérifier que : $S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

**4.** En remarquant que $1 + t^\alpha \geqslant 1$ dans l'intégrale, justifier que $\left|S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\left|S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}\right| = \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ puisque $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

Dans l'intégrale : $1 + t^\alpha \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+t^\alpha} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} \leqslant t^{\alpha(n+1)}$ vu que $t^{\alpha(n+1)} \geqslant 0$ mais alors, par croissance de l'intégrale

$$\left|S_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}\right| = \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\alpha(n+1)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha(n+1)+1}}{\alpha(n+1)+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha(n+1)+1}$$

Mais alors : $0 \leqslant \left|S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{1}{\alpha(n+1)+1}$ or $\dfrac{1}{\alpha(n+1)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (puisque $\alpha > 0$) donc, par le théorème des gendarmes, on a $\boxed{\left|S_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

**5.** En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

La question précédente permet d'affirmer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$

De sorte que, pour $\alpha = 1$ puis pour $\alpha = 2$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \boxed{\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\arctan t\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

**6. a.** Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ où $v_n = \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$

On a : $\quad v_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\times 2n} \Leftrightarrow v_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n^2} \quad$ et $\dfrac{1}{2n^2} > 0$

Par critère d'équivalence, $\sum v_n$ et $\sum \dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{n^2}$ sont de même nature or on reconnaît, pour la seconde série, une série de Riemann convergente aussi on peut conclure que $\sum v_n$ converge $\boxed{\text{ce qui assure l'existence de } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n}$

**b.** En remarquant que $\quad v_n = \dfrac{2}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1}$, établir que la somme partielle d'ordre $n$ de $\sum v_n$ est le double d'une somme partielle (mais pas d'ordre $n$) de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

$\dfrac{2}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2(n+1)-(2n+1)}{(2n+1)(n+1)} = \dfrac{1}{(2n+1)(n+1)} = v_n$

Calculons la somme partielle d'ordre $n$ de $\sum v_n$ :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{2k+1} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2\,\overbrace{(-1)^{2k}}^{=+1}}{2k+1} + \frac{2\,\overbrace{(-1)^{2k+1}}^{-1}}{(2k+1)+1}\right) = \sum_{p=1}^{2n+1}\frac{2(-1)^p}{p+1} = 2\sigma_{2n+1}$$

où $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$ est la somme partielle d'ordre $n$ de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

Puisque $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$, on sait que $\quad \sigma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2 \quad$ mais alors toutes les suites extraites de $(\sigma_n)$ convergent vers la même limite de sorte que $\sigma_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$ ce qui entraîne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ln 2$

La limite des sommes partielles étant la somme de la série, on peut conclure que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2\ln 2}$

EXERCICE N° 2 **_Résolution d'une équation du second ordre par changement de variables_**

On considère l'équation $\quad (\mathrm{E}_2): \; t^2y''+3ty'+4y = t\ln t \quad$ sur $]0,+\infty[$

**1.** D'après le cours, que dire de la structure de l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E}_2)$ ?
*On pourra introduire des solutions particulières ou homogènes indéterminées pour cette description*

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants qui est résolue sur $]0,+\infty[$ (car $t^2\neq 0$) donc l'ensemble des solutions est de la forme $y_p+\mathrm{Vect}(h_1,h_2)$ où $y_p$ est une solution particulière et $h_1$ et $h_2$ sont des des solutions homogènes non colinéaires.

**2.** On considère l'équation $\quad (\mathrm{E}): \; y''+2y'+4y = xe^x$

**a.** Donner la solution homogène de (E)

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
L'équation caractéristique est $\quad r^2+2r+4=0 \quad$ de discriminant $\Delta = 2^2-4\times4 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$
Les racines complexes conjuguées sont $\dfrac{-2\pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1\pm i\sqrt{3}$ qu'on garde sous forme algébrique $r=\rho\pm i\omega$ pour exprimer la solution finale écrite en complexe à l'aide de $e^{rt} = \underbrace{e^{\rho t}}_{\text{amortissement}}\underbrace{e^{i\omega t}}_{\text{partie périodique}}$

$\boxed{\text{L'expression d'une solution homogène est donc} \quad y(x) = e^{-x}\big(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}x)+\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}x)\big) \text{ où } (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2}$

**b.** Déterminer une solution particulière de (E) analogue au second membre autrement dit de la forme $y(x) = (ax+b)e^x$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, la fonction $y$ d'expression $y(x)=(ax+b)e^x$ est bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ :

$$y(x) = (ax+b)e^x \;(\times4) \qquad y'(x) = (ax+a+b)e^x \;(\times2) \qquad y''(x) = (ax+2a+b)e^x \;(\times1)$$

$$y''+2y'+4y = xe^x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (7ax+4a+7b)e^x = xe^x \Leftrightarrow \begin{cases} 7a=1 \\ 4a+7b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{7} \\ b=-\frac{4}{49} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Une solution particulière de (E) a pour expression} \quad y(x) = \left(\dfrac{x}{7}-\dfrac{4}{49}\right)e^x}$

**3.** Si $f$ est une solution de $(\mathrm{E}_2)$, on pose, pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x) = f(e^x)$.

**a.** Justifier que $g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer les dérivées $g'(x)$ et $g''(x)$ à l'aide de $f$.

Puisque $f$ est une solution de $(\mathrm{E}_2)$, on sait que $f$ est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$. Par composition :

$$\begin{cases} \exp = [x\mapsto e^x] \text{ est deux fois dérivables sur } \mathbb{R} \\ f \text{ est deux fois dérivables sur } ]0,+\infty[ \\ \forall x\in\mathbb{R}, e^x\in]0,+\infty[ \end{cases} \Rightarrow g = f\circ\exp \text{ est bien deux fois dérivables sur } \mathbb{R}$$

De plus, pour tout $x$ réel : $\boxed{g'(x) = e^xf'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^xf'(e^x)+(e^x)^2f''(e^x)}$

**b.** Démontrer que : $\quad f$ est solution de $(\mathrm{E}_2)$ sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow g$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) \text{ sur } ]0,+\infty[ &\Leftrightarrow \forall t>0, t^2f''(t)+3tf'(t)+4f(t) = t\ln t \\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, (e^x)^2f''(e^x)+3(e^x)f'(e^x)+4f(e^x) = e^x\ln(e^x) \\
&\qquad \text{en posant } t=e^x>0 \text{ vu que exp réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } ]0,+\infty[ \\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, (e^x)^2f''(e^x)+e^xf'(e^x)+2e^xf'(e^x)+4f(e^x) = e^x\times x \\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, g''(x)+2g'(x)+4g(x) = xe^x \\
&\Leftrightarrow g \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

**c.** En déduire l'expression de $f(t)$ pour $t>0$. Identifier, dans cette expression, les éléments permettant l'analogie avec la structure des solutions rappelées en 1.

$$\begin{aligned}
&f \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2) \text{ sur } ]0,+\infty[ \\
&\Leftrightarrow g \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2, \forall x\in\mathbb{R}, g(x) = \left(\frac{x}{7}-\frac{4}{49}\right)e^x+e^{-x}\big(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}x)+\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}x)\big) \\
&\Leftrightarrow \exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2, \forall t>0, f(t) = \left(\frac{\ln t}{7}-\frac{4}{49}\right)e^{\ln t}+e^{-\ln t}\big(\mathrm{A}\cos(\sqrt{3}\ln t)+\mathrm{B}\sin(\sqrt{3}\ln t)\big) \\
&\qquad \text{avec } t=e^x \Leftrightarrow x=\ln t \\
&\Leftrightarrow \exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2, \forall t>0, f(t) = \underbrace{\frac{t\ln t}{7}-\frac{4t}{49}}_{=y_p(t)}+\mathrm{A}\times\underbrace{\frac{1}{t}\cos(\sqrt{3}\ln t)}_{=h_1(t)}+\mathrm{B}\times\underbrace{\frac{1}{t}\sin(\sqrt{3}\ln t)}_{=h_2(t)}
\end{aligned}$$

Remarques suite à la correction des copies

I-1 Beaucoup d'entre vous n'ont prouvé qu'une implication ! L'écriture « ne DVG pas » pour dire « ne diverge pas grossièrement » n'est pas claire et donc doit être évitée.

I-2 et I-3 L'équivalent a été bien démontré sous l'hypothèse $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il s'agissait donc, dans la question 3, de justifier, en s'appuyant sur la question 1, que la convergence d'une des séries assure cette hypothèse $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc permet d'utiliser le critère d'équivalence.

I-4 Des arguments souvent bancals pour l'indication où la valeur absolue apparaît comme par miracle...Lorsque l'argument était juste, vous utilisez une disjonction de cas qu'on peut éviter (voir corrigé).

L'argument par majoration qui s'ensuit doit comporter soit un hypothèse de signe soit un recours à la CVA.

II-1 Attention à être bien précis : le terme général d'un produit de Cauchy est une somme de 0 à $n$ donc il fallait expliquer le passage à une somme de 1 à $n-1$ : $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} + a_n b_0 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ si on impose $a_0 = b_0 = 0$ !

**Attention ! La convergence d'un produit de Cauchy nécessite de l'absolue convergence** et pas seulement de la convergence. L'exemple étudié en II-2 donne justement un contre-exemple puisque le produit de Cauchy d'une série convergente (mais pas absolument convergente) donne une série qui diverge grossièrement !

II-2-a et b Bien réussie en général avec le même bémol sur la gestion du passage d'une somme de $k=0$ à $n$ à une somme de $k=1$ à $n-1$ où les arguments sont parfois confus...

II-2-c Assez bien fait : n'oubliez pas de préciser la dérivabilité avant de dériver...

II-2-d Justifier $|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ (voir corrigé) ! En utilisant II-2-c, vous obtenez généralement $|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{n}$

Certains veulent alors conclure en parlant utilisant un théorème de minoration des séries : **Attention** $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ n'est pas une somme partielle car le terme sommé dépend aussi de $n$...(une somme partielle est de la forme $\sum_{k=n_0}^{n} a_k$ où $a_k$ ne dépend pas de $n$!)

De même, certains affirment que « $(|c_n|)$ est une suite croissante car $|c_n|$ somme de termes positifs » : c'est FAUX.

C'est vrai pour une somme partielle de termes positifs mais pas pour une somme quelconque :

par exemple, $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2(n+1)} = \frac{2}{n^2(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{n}$ qui décroît... Ceux qui avait la minoration $|c_n| \geqslant \frac{2(n-1)}{n}$ ont souvent peiné à conclure proprement à l'aide, par exemple, d'un raisonnement par l'absurde.

Attention ! Vous ne pouvez pas écrire : $|c_n| \geqslant \frac{2(n-1)}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |c_n| \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2(n-1)}{n}$ si vous n'avez pas justifié que la suite $(|c_n|)$ converge (autrement dit que la première limite existe) L'avantage de raisonner par l'absurde est d'assurer l'existence de cette limite : en supposant que $\sum c_n$ ne diverge pas grossièrement, vous supposez que $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc que $|c_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui amène à une contradiction en passant à la limite dans l'inégalité...

III-1 Le théorème des séries alternées est repérés et, en général, correctement justifié sauf par certains qui oublient l'hypothèse de décroissance...

III-2 Lorsque $\alpha > 0$, l'intégrale est généralisée car $[t \mapsto t^{\alpha n}] = [t \mapsto e^{\alpha n \ln t}]$ est seulement continue sur $]0,1]$ (exposant réel non nécessairement entier) : il s'agit alors de justifier la convergence de l'intégrale avant de la calculer...(chapitre à venir dans la suite du cours)

III-3 Pas de problème en général pour utiliser la linéarité de l'intégrale afin d'écrire la différence comme l'intégrale

$$\mathrm{S}_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{\alpha k} - \frac{1}{1+t^\alpha} \right) \mathrm{d}t$$

Dans ma correction, je repère alors une somme géométrique car $(-1)^k t^{\alpha k} = \left(-t^\alpha\right)^k$. Vous avez plutôt, en général, ensuite opté pour une stratégie utilisant des sommes télescopiques après avoir réduit au même dénominateur.

$$\mathrm{S}_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} \left( (1+t^\alpha) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{\alpha k} - 1 \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{\alpha k} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{\alpha(k+1)} - 1 \right) \mathrm{d}t$$

Toutefois, vous perdez du temps en refaisant la démonstration à l'aide d'un changement d'indice alors qu'on pouvait obtenir le résultat plus simplement en remarquant que $(-1)^k = -(-1)^{k+1}$ :

$$\mathrm{S}_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} \left( \sum_{k=0}^{n} \left( (-1)^k t^{\alpha k} - (-1)^{k+1} t^{\alpha(k+1)} \right) - 1 \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} \left( (-1)^0 t^0 - (-1)^{n+1} t^{\alpha(n+1)} - 1 \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}$$

III-4 Souvent vous suggérez $\int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t$ sans vraiment savoir où l'argument est utiliser...On l'utilise à deux reprises : une fois pour justifier que $\left|\mathrm{S}_n - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}\right| = \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t$ et une autre fois pour obtenir l'encadrement $0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\alpha(n+1)}\mathrm{d}t$ qui permet d'obtenir la limite souhaitée.

Attention à la rédaction de théorème d'encadrement : vous avez $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ et vous savez que $\begin{cases} a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases}$

je vous déconseille d'écrire immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ avant d'avoir évoquer le théorème d'encadrement. En effet, cela laisse penser que vous utilisez la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$ avant d'avoir justifier son existence...

Le théorème d'encadrement (ou des gendarmes) doit d'abord être évoqué car il assure l'existence de la limite et précise même la valeur de la limite (le passage à la limite dans les inégalités est la fin de la démonstration du théorème...)

III-5 Le calcul n'a pas posé de difficulté mais il me semble que l'équivalence $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Leftrightarrow |u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ n'est pas assimilée par certains...

Revenons pourtant à la définition :

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ signifie $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

$|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ signifie $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow ||u_n - \ell| - 0| = |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$

C'est donc exactement la même définition...

III-6 Pas de problème pour le a) avec le critère d'équivalence. Pour le b), vous oubliez, en général, de justifier l'égalité $v_n = \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$. Obtenir la relation entre les sommes partielles est obtenue : $\sum_{k=0}^{n} v_k = 2\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$ mais on peut regretter un manque de précision dans votre rédaction : $\frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2(n+1)} = \frac{2(-1)^{2n}}{(2n)+1} + \frac{2(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1}$

De même, la conclusion $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ est souvent brutale : il serait judicieux de préciser que, puisque les deux séries impliquées convergent, les sommes de ces séries convergent vers les sommes des séries d'où l'égalité obtenue en passant à la limite.