DEVOIR MAISON N° 3

DM à rendre pour le 02/12/2024

EXERCICE N° 1 — *Étude d'une famille de séries*

On fixe un paramètre $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et on considère le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\alpha n+1}$

1. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge.

2. Vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t$

3. On note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Vérifier que : $\mathrm{S}_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\mathrm{d}t$

4. En remarquant que $1+t^\alpha \geqslant 1$ dans l'intégrale, justifier que $\left|\mathrm{S}_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

5. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

6. **a.** Justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ où $v_n = \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$

b. En remarquant que $v_n = \dfrac{2}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1}$, établir que la somme partielle d'ordre n de $\sum v_n$ est le double d'une somme partielle (mais pas d'ordre n) de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

EXERCICE N° 2 — *Résolution d'une équation du second ordre par changement de variables*

On considère l'équation $(\mathrm{E}_2) :\ t^2 y'' + 3ty' + 4y = t\ln t$ sur $]0,+\infty[$

1. D'après le cours, que dire de la structure de l'ensemble des solutions de (E_2) ?
On pourra introduire des solutions particulières ou homogènes indéterminées pour cette description

2. On considère l'équation $(\mathrm{E}) :\ y'' + 2y' + 4y = xe^x$

a. Donner la solution homogène de (E)

b. Déterminer une solution particulière de (E) analogue au second membre autrement dit de la forme $y(x) = (ax+b)e^x$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

3. Si f est une solution de (E_2), on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(e^x)$.

a. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer les dérivées $g'(x)$ et $g''(x)$ à l'aide de f.

b. Démontrer que : f est solution de (E_2) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow g$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$

c. En déduire l'expression de $f(t)$ pour $t > 0$. Identifier, dans cette expression, les éléments permettant l'analogie avec la structure des solutions rappelées en 1.