COUP DE POUCE POUR DEVOIR MAISON N° 2

1. a. Que s'agit-il d'établir ? (voir définition de sev stable par un endomorphisme)
Comment sait-on qu'un vecteur y est dans $\mathrm{Im}\, f$? (définition de l'image d'un endomorphisme)

b. Par définition (endomorphisme induit), on sait que g est linéaire avec $g : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ et on a : $\forall x \in \mathrm{Im}\, f, g(x) = f(x)$
Il s'agit d'établir des égalités entre des sev aussi on dispose de deux techniques : pour montrer $\mathrm{F} = \mathrm{G}$
- soit on prouve une double inclusion : $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ s'obtient en prouvant $x \in \mathrm{F} \Rightarrow x \in \mathrm{G}$ puis on prouve aussi $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$
mais on peut aussi obtenir directement la double inclusion par un raisonnement en équivalence : $x \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in \mathrm{G}$
- soit on prouve une inclusion et l'égalité des dimensions

Ici, la question suivante montre qu'on va plutôt obtenir une relation sur les dimensions à partir de l'égalité des sev aussi c'est avec un raisonnement en double inclusion qu'on va prouver ces égalités

c. Quel théorème relie le rang et le noyau ? Maintenant que vous avez le théorème, il faut trouver à qui l'appliquer...et cette question c vient après la question b...

d. Cette fois, c'est une équivalence entre trois proposition qu'il faut établir et on doit bien sûr s'appuyer sur ce qui a été prouvé avant... Je rappelle que, pour prouver $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$, on prouve en général $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$
N'hésitez pas à écrire : Je sais … Je veux … pour mieux organiser vos preuves.
Pour $i) \Rightarrow ii)$, je rappelle que, pour prouver l'égalité de deux sev, vous pouvez prouver une inclusion et l'égalité des dimensions. L'une des inclusions s'obtient très facilement et, pour l'égalité des dimensions, pensez à utiliser 1c
Pour $ii) \Rightarrow iii)$, il s'agit là encore de prouver l'égalité de deux sev. L'une des inclusion s'obtient très facilement. Pour l'égalité des dimension, pensez à utiliser deux fois le théorème du rang appliqué ici aux endomorphismes concernés.
Pour $iii) \Rightarrow i)$, quelle est la caractérisation d'un supplémentaire en dimension finie ? L'une des propositions n'est-elle pas la conclusion d'un théorème bien connu...
Pour l'autre diverses pistes sont possibles : si F et G sont des sev de E,
• $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \{0\}$ puisque l'autre inclusion est trivialement vrai vu que F et G sont des sev
Ici, il faut bien restituer les définitions de $\mathrm{Im}\, f$ et de $\mathrm{Ker}\, f$ et ne pas oublier le "on sait" pour conclure... OU BIEN
• $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = 0$
Ici, il faut penser à exploiter 1.c. et le théorème du rang pour conclure

2. a. Comment caractérise-t-on la supplémentarité en dimension finie ?
Pour l'égalité sur les dimensions, n'oublie pas ce qu'est H...
Pour l'égalité de sev, que signifie $\mathrm{M} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$? Raisonner ensuite, par l'absurde, en supposant la non nullité du scalaire.

b. Si b) vient après a), c'est que a) est utile pour b) en général...
Décomposer M et M" dans la somme directe de 2.a. et, en déduire, celle de MM' en exploitant que H est un sev stable par le produit matriciel.
De ces décompositions, la définition du projecteur p (sur qui ? parallélement à qui ? voir définition d'un projecteur dans le cours) vous permet d'obtenir $p(\mathrm{M})$, $p(\mathrm{M}')$ et $p(\mathrm{MM}')$ et ainsi de conclure.

c. La question est très guidée. Le raisonnement par l'absurde consiste à obtenir une contradiction en supposant qu'une matrice M inversible est dans H. Quelle est la définition de « M est inversible » ? Pensez alors à utiliser 2.b...

d. Où sont les images $p(\mathrm{M})$ de part la définition du projecteur p ?
Avec 2.b. on a $p(\mathrm{M}^2) = p(\mathrm{M})p(\mathrm{M}) = p(\mathrm{M})^2$ et, par une récurrence immédiate, $p(\mathrm{M}^k) = p(\mathrm{M})^k$
Si M est nilpotente, $\mathrm{M}^k = 0$. Qu'obtient-on si on prend l'image par p ? Pourquoi $p(0) = 0$? Pourquoi $p(\mathrm{M}^k) = \alpha^k \mathrm{I}_n$? En déduire que $\alpha = 0$ et donc... Pour finir, vu la définition de p, que dire de H et $\mathrm{Ker}\, p$?

e. Utiliser la post ou la pré multiplication pour justifier rigoureusement que $\mathrm{A}^2 = 0$ puis que $\mathrm{B}^n = 0$
Pour le calcul du déterminant, utiliser les propriétés de calcul des déterminants (opération sur les colonnes ou développement selon une colonne/ligne à choisir)

f. Je vous rappelle que l'ensemble de l'exercice est un raisonnement par l'absurde à partir de la supposition $\mathrm{I}_n \notin \mathrm{H}$.
A l'aide des questions précédentes, prouver que A, B et A + B sont dans H mais prouver aussi que A + B n'est pas dans H
N'y a-t-il pas une contradiction...