PT 2024-2025 : Correction du DM nº 2

DEUX EXERCICES D'ALGÈBRE LINÉAIRE AXÉS SUR LA DÉMONSTRATION

Les deux exercices sont totalement indépendants

1. *Une autre caractérisation de la supplémentarité*

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

a. Justifier que $\mathrm{Im}\, f$ est stable par f.

Il s'agit d'établir que $f(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$ où on rappelle que $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}\}$ soit : $\forall y \in \mathrm{Im}\, f,\ f(y) \in \mathrm{Im}\, f$
Mais, si $y \in \mathrm{Im}\, f$, alors $y \in \mathrm{E}$ puisque $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ aussi $f(y) \in \mathrm{Im}\, f$ (c'est bien une image par f).
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}\, f \text{ est stable par } f}$

b. On note g l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}\, f$. Démontrer que $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\,(f^2)$

Par définition : $g \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}\, f)$ avec $\forall x \in \mathrm{Im}\, f,\ g(x) = f(x)$
Aussi : $x \in \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}\, f$ et $g(x) = f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}\, f$ et $x \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow x \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$ soit $\boxed{\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f}$

Et : $\mathrm{Im}\, g = \underbrace{\{g(y) \mid y \in \mathrm{Im}\, f\} = \{f(y) \mid y \in \mathrm{Im}\, f\}}_{\text{car } g(y)=f(y) \text{ si } y \in \mathrm{Im}\, f} \underbrace{= \left\{f\big(f(x)\big) \mid x \in \mathrm{E}\right\}}_{\text{car } \mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in \mathrm{E}\}} \underbrace{= \{f^2(x) \mid x \in \mathrm{E}\}}_{\text{car } f(f(x)) = f^2(x).} = \mathrm{Im}\, f^2$ donc $\boxed{\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\,(f^2)}$

c. En déduire que : $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f)$

Appliquons le théorème du rang à l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathrm{Im}\, f)$ alors :
$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, g + \dim \mathrm{Im}\, g \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\, f = \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) + \dim \mathrm{Im}\,(f^2)$ avec la question précédente
Vu que $\dim \mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{rg}(f^2)$ et $\dim \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{rg}(f)$ alors :
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) + \mathrm{rg}(f^2) \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f)}$$

d. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$ ii) $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$ iii) $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$

$\boxed{\text{Il suffit de prouver i)} \Rightarrow \text{ii)} \Rightarrow \text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}$

• $\boxed{\text{Prouvons i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ On suppose que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$(c'est le "on sait").
On veut établir $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$ (c'est le "on veut").
("On prouve") Pour prouver l'égalité de deux sev, on montre une inclusion et l'égalité des dimensions.
L'une des inclusions est triviales : $\underline{\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\, f\ \text{(a)}}$ puisque : $\forall y \in \mathrm{Im}\,(f^2), \exists a \in \mathrm{E},\ y = f^2(a) = f\big(f(a)\big) \in \mathrm{Im}\, f$
Par ailleurs, si i) est vraie, on sait que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 0$
La relation obtenue en question 1.c. devient $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f) \Leftrightarrow \underline{\dim \mathrm{Im}\,(f^2) = \dim \mathrm{Im}\,(f)\ \text{(b)}}$
Finalement :(a) et (b) $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{Im}\, f$

• $\boxed{\text{Prouvons ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$ On suppose que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$. On veut établir que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$
Pour prouver l'égalité de deux sev, on montre une inclusion et l'égalité des dimensions.
L'inclusion $\underline{\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f^2)\ \text{(a)}}$ est triviale :
$$x \in \mathrm{Ker}\,(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(0) =_{f \text{ linéaire}} 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(f^2)$$
Le théorème du rang appliqué à $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et à $f^2 \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ permet d'écrire : $\begin{cases} \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(f) \\ \dim \mathrm{Ker}\,(f^2) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(f^2) \end{cases}$
En réalisant la différence, on a : $\dim \mathrm{Ker}\, f - \dim \mathrm{Ker}\,(f^2) = \mathrm{rg}(f^2) - \mathrm{rg}(f)$
Mais on sait que : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2) \Rightarrow \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2) \Rightarrow \underline{\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Ker}\,(f^2)\ \text{(b)}}$ à cause de la relation précédente
Finalement : (a) et (b) $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$

• $\boxed{\text{Prouvons iii)} \Rightarrow \text{i)}}$ On suppose que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$. On veut établir que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$
Il s'agit d'établir $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$ où E est de dimension fini soit : $\begin{cases} \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}\ (a) \\ \dim \mathrm{Ker}\,(f) + \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim \mathrm{E}\ (b) \end{cases}$
La proposition (b) est vraie car c'est l'écriture du théorème du rang pour l'endomorphisme f de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$
Pour a), il s'agit de prouver : $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \Rightarrow x = 0$ car $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ étant des sev, l'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ est triviale
Si $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ alors : $x \in \mathrm{Ker}\, f$ donc $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \exists a \in \mathrm{E}, x = f(a)$
aussi $0 = f(x) = f^2(x) \Rightarrow a \in \mathrm{Ker}\, f^2$ or $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$ donc $x = f(a) = 0$. On a donc bien justifier a)
OU BIEN : (a) $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$ d'après la question 1.c.
$\Leftrightarrow \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(f^2) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(f)$ en multipliant par -1 et en ajoutant $\dim \mathrm{E}$
$\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(f^2) = \dim \mathrm{Ker}\, f$ avec le théorème du rang appliqué à $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $f^2 \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$
Or, cette dernière proposition est vérifiée si $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)$ donc, par équivalence logique, (a) est vérifiée également.
Finalement : (a) et (b) $\Leftrightarrow \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$

2. *Une propriété des hyperplans de* $M_n(\mathbb{R})$ *stables par le produit matriciel*

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ et H un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ tel que H est stable par le produit matriciel.
L'objectif de l'exercice est de montrer que $I_n \in H$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que $I_n \notin H$

a. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$

Il s'agit d'établir : 1) $H \cap \mathrm{Vect}(I_n) = \{O_{n,n}\}$ et 2) $\dim H + \dim \mathrm{Vect}(I_n) = \dim M_n(\mathbb{R})$

• Soit $M \in H \cap \mathrm{Vect}(I_n)$ alors $M = \alpha I_n$ puisque $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$. Si $\alpha \neq 0$, on a $I_n = \dfrac{1}{\alpha} M \in H$ puisque F est un sev donc c'est absurde puisque $I_n \notin H$ aussi, par l'absurde, on a $\alpha = 0$ et donc $M = O_{n,n}$. La proposition 1) est prouvée.

• Puisque H est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$, on sait que : $\dim H = \dim M_n(\mathbb{R}) - 1$.

Par ailleurs, $\dim \mathrm{Vect}(I_n) = 1$. Aussi : $\dim H + \dim \mathrm{Vect}(I_n) = \dim M_n(\mathbb{R}) - 1 + 1 = \dim M_n(\mathbb{R})$ et la proposition 2) est prouvée.

• Finalement : $\left\{ \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \boxed{M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)}$

b. Soit p le projecteur sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à H. Prouver que, pour toutes matrices M et M′, on a : $p(MM') = p(M)p(M')$

En utilisant Q2a, on décompose les matrices M et M′ dans la somme $M_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$ de manière unique :

$$M = M_H + \alpha I_n \quad \text{et} \quad M' = M'_H + \alpha' I_n \quad \text{où } (M_H, M'_H) \in H^2$$

et aussi : $MM' = \left(M_H + \alpha I_n\right)\left(M'_H + \alpha' I_n\right) = M_H M'_H + \alpha M'_H + \alpha' M_H + \alpha\alpha' I_n$

Or, puisque H est stable par le produit matriciel, $M_H M'_H \in H$ et, puisque H est un sev, il est stable par combinaison linéaire, aussi : $A = \underbrace{M_H M'_H}_{\in H} + \alpha \underbrace{M'_H}_{\in H} + \alpha' \underbrace{M_H}_{\in H} \in H$ de sorte que :

$MM' = \underbrace{A}_{\in H} + \underbrace{\alpha\alpha' I_n}_{\in \mathrm{Vect}(I_n)}$ est l'unique décomposition de MM′ dans $M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$

On sait alors, par définition de p, que : $p(M) = \alpha I_n$ et $p(M') = \alpha' I_n$ et : $p(MM') = \alpha\alpha' I_n$

Dés lors : $p(MM') = \alpha\alpha' I_n = (\alpha I_n)(\alpha' I_n) = p(M)p(M')$ soit : $\boxed{p(MM') = p(M)p(M')}$

c. Que vaut $p(I_n)$? Que vaut $p(M)$ lorsque $M \in H$?

En utilisant Q2b et en raisonnant par l'absurde, déduire que H ne contient pas de matrices inversibles.

$I_n \in \mathrm{Vect}(I_n)$ et $\mathrm{Vect}(I_n) = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\,(p - id)$ aussi $\boxed{p(I_n) = I_n}$ et $M \in H$ où $H = \mathrm{Ker}\, p$ donc $\boxed{p(M) = O}$

On raisonne par l'absurde : on considère $M \in H$ avec M inversible aussi $MM^{-1} = I_n$ aussi, en utilisant Q2b :

$p(M)p(M^{-1}) = p(MM^{-1}) = p(I_n) \Rightarrow O_{n,n} \times p(M^{-1}) = I_n \Rightarrow O_{n,n} = I_n$ c'est absurde et, par suite

$\boxed{\text{H ne contient pas de matrices inversibles}}$

d. Une matrice est nilpotente lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ avec $M^k = 0$. En remarquant que $p(M) = \alpha I_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et, en utilisant Q2b, prouver que $M \in \mathrm{Ker}\, p$ lorsque M est nilpotente. En déduire que H contient toutes les matrices nilpotentes.

Par définition, $p(M) \in \mathrm{Vect}(I_n)$ donc $\boxed{p(M) = \alpha I_n \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}}$

<u>Si M est nilpotente</u>, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ avec $M^k = 0$ mais, alors en prenant l'image par p, on a : $p(M^k) = p(0)$

p est linéaire donc $p(0) = 0$ et, avec Q2b : $p(M^k) = p(M \times M \times \cdots \times M) = p(M) \times p(M) \times \cdots \times p(M) = p(M)^k = \left(\alpha I_n\right)^k = \alpha^k I_n$

Ainsi : $p(M^k) = p(0) \Rightarrow \alpha^k I_n = 0 \Rightarrow \alpha^k = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ et donc : $p(M) = \alpha I_n = 0 \times I_n = 0$ soit <u>$M \in \mathrm{Ker}\, p$</u>

Puisque p est le projecteur sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à H, on a $\mathrm{Ker}\, p = H$ de sorte qu'on a bien obtenu que

$\boxed{\text{H contient toutes les matrices nilpotentes}}$

e. On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficients ligne n colonne 1 qui vaut 1 et la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $b_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$. Prouver que A et B sont nilpotentes et calculer $\det(A+B)$.

On a : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Montrons que $\boxed{\text{A et B sont nilpotentes en vérifiant que } A^2 = 0 \text{ et } B^n = 0}$

<u>Méthode n° 1</u> (avec les post et pré multiplications)

Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Lorsqu'on calcule $A^2 = A \times A$, la première colonne de A^2 est $C_n = 0$ et toutes les autres colonnes sont nulles donc $A^2 = 0$

En raisonnant de manière analogue sur les colonnes : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et, en poursuivant le calcul des puissances de B, on décale la diagonale de 1 à chaque fois aussi B^3 a ses trois premières colonnes nulles, B^4 ses 4 premières colonnes nulles jusqu'à B^n qui n'a que des colonnes nulles soit $B^n = 0$

Méthode nº 2 (avec la formule du produit matricielle)

Notons $[M]_{ij}$ le coefficient (i, j) de la matrice M alors le seul coefficient non nul de A est $[A]_{n1} = 0$ aussi :

si $i \neq n$: $[A^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[A]_{ik}}_{=0} \times [A]_{kj} = 0$ et $[A^2]_{nj} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[A]_{nk}}_{=0 \text{ sauf pour } k=1} \times [A]_{kj} = [A]_{n1} \times \underbrace{[A]_{1j}}_{=0} = 0$

donc $A^2 = 0$ car tous ses coefficients sont nuls.

$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[B]_{ik}}_{=0 \text{ sauf si } k=i+1} [B]_{kj}$ d'où $[B^2]_{nj} = 0$ et, si $i < n$: $[B^2]_{ij} = 1 \times \underbrace{[B]_{i+1,j}}_{=0 \text{ sauf si } j=i+2}$ aussi $[B^2]_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

En itérant, on trouve $[B^3]_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$,..., $[B^{n-1}]_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+n-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (1,n) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ puis $[B^n] = 0$

$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \det(I_n)$ en réalisant successivement les n-1 opérations $C_1 \leftarrow C_2$ $C_2 \leftarrow C_3, \dots, C_{n-1} \leftarrow C_n$ qui transforme à chaque fois le déterminant en son opposé.

$$\text{Or } \det(I_n) = 1 \Rightarrow \boxed{\det(A+B) = (-1)^{n-1}}$$

OU BIEN :

on développe le déterminant $\det(A+B)$ selon la colonne 1 où il n'y a qu'un seul coefficient en position $(n,1)$:

$$\det(A+B) = (-1)^{n+1} \times 1 \times \underbrace{\det(I_{n-1})}_{=1} = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1} \times (-1)^2 = (-1)^{n-1}$$

f. En utilisant les questions précédentes, obtenir la contradiction attendue. Conclure.

Puisque A et B sont nilpotentes, elles sont dans H d'après Q2d.

Puisque H est un hyperplan, c'est un sous-espace vectoriel donc $A + B \in H$

Or $\det(A+B) \neq 0$ donc $A+B$ est inversible aussi $A + B \notin H$ d'après Q2c.

$\boxed{\text{Il y a donc une contradiction puisque } A+B \text{ doit être, en même temps, dans H et pas dans H.}}$

On peut donc conclure que la supposition $I_n \notin H$ est fausse et donc $\boxed{I_n \in H}$

Remarques suite à la correction

1. a. La définition de « sev stable par un endomorphisme » n'est pas encore maîtrisée par certains...Sur un devoir à la maison, c'est quand même assez déroutant! Cette question teste essentiellement 2 définitions du cours :

- la notion d'image d'une application linéaire qu'on peut décrire de deux façons (à connaître)

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \left\{y \in E \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\right\} \text{ (ensemble des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme une image par } f\text{)}\\ &= \left\{f(x) \mid x \in E\right\} \text{ (ensemble des images par } f\text{)}\end{aligned}$$

- la notion « F est un sev stable par f » lorsque $f(F) \subset F \Leftrightarrow \forall x \in F,\ f(x) \in F$ (Attention, certains confondent encore $\subset$ et $\in$!)

Il s'agit donc de démontrer $\forall x \in \operatorname{Im} f,\ f(x) \in \operatorname{Im} f$ de sorte que la preuve est triviale car, par définition de $\operatorname{Im} f$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$! Cette trivialité de la preuve est peut-être déstabilisante mais c'est un fait : la justification demandée est vraie parce qu'elle découle des définitions!

b. Plutôt bien fait : vous avez travailler, en général, par double inclusion alors qu'il était possible de raisonner par équivalence (voir corriger). En effet : $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ traduit l'égalité $A = B$ puisque l'implication directe donne $A \subset B$ et la réciproque donne $B \subset A$.

c. Il ne suffit pas de dire « en appliquant le théorème du rang » : il faut préciser à quel endomorphisme vous l'appliquez! Ici, on l'appliquait à g (pas à f)

d. Attention à bien lire la question : il ne s'agissait pas de montrer indépendamment les propositions i), ii) et iii) mais de démontrer l'équivalence de ces propositions autrement dit : $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$

Prenez le temps de réfléchir à vos stratégies :

- pour montrer une égalité de sev (type ii) ou iii)), prouver une double inclusion est une stratégie possible mais ça n'est pas toujours la plus efficace. En dimension finie : $F = G \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases}$ et l'égalité des dimensions est bien souvent assez simple à obtenir.

- pour montrer $F \oplus G = E$, vérifier $\begin{cases} F \cap G = \{0\}\ (a) \\ F + G = E\ (b) \end{cases}$ est une stratégie possible mais, en dimension finie, $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = \dim E\ (c) \end{cases}$ est souvent plus efficace. En particulier, pour prouver iii), l'égalité des dimensions est immédiatement conséquence du théorème du rang appliqué à f. Dans vos copies, vous semblez croire que (c) n'est qu'une étape pour obtenir (b) alors qu'elle se substitue complètement à (b).

• Pour vous convaincre, je vais ici refaire la preuve : $\begin{cases} F \cap G = \{0\}\ (a) \\ F + G = E\ (b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\}\ (a) \\ \dim F + \dim G = \dim E\ (c) \end{cases}$

<u>Preuve $\Rightarrow$</u> : On sait que : $\dim E =_{\text{par (b)}} \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G =_{\text{par (a)}} \dim F + \dim G + 0 = \dim F + \dim G$ d'où (c)

<u>Preuve $\Leftarrow$</u> : $F + G \subset E$ (car F et G sev de E) et : $\dim(F+G) = \underbrace{\dim F + \dim G}_{=\dim E \text{ par (c)}} - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0 \text{ par (a)}} = \dim E$ d'où $\begin{cases} F + G \subset E \\ \dim(F+G) = \dim E \end{cases} \Leftrightarrow b)$

• Attention : $\begin{cases} F + G \subset E \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$ n'est pas suffisant pour obtenir $F \oplus G = E$

<u>Contre-exemple</u> dans $E = \mathbb{R}^3$: $F = \operatorname{Vect}\big((1,0,0)\big)$ et $G = \operatorname{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$ vérifie $\begin{cases} F + G \subset E \\ \dim F + \dim G = 1 + 2 = 3 = \dim E \end{cases}$ et, pourtant, il n'y a pas l'égalité car $(0,0,1) \in E$ et n'appartient pas à $F + G$

2. a. Les remarques ci-dessus reste valable ici : il fallait ici bien sûr caractériser la supplémentarité par $\begin{cases} H \cap \operatorname{Vect}(I_n) = \{0\} \\ \dim H + \dim \operatorname{Vect}(I_n) = \dim M_n(\mathbb{R}) \end{cases}$ puisque l'égalité des dimensions découle naturellement du fait que H est un hyperplan.

b. Assez bien mené en général.

c. Attention, supposé que $M \in H$ est inversible ne vous permet pas de dire que $M^{-1} \in H$ mais seulement que M^{-1} existe.
En exploitant la question précédente sur l'égalité $M \times M^{-1} = I_n$, on obtenait une absurdité : $\underbrace{p(M)}_{=0} \times p(M^{-1}) = p(I_n) \Rightarrow 0 = I_n$

d. Assez bien fait

e. Les justifications de $A^2 = 0$ et $B^n = 0$ sont, en général, trop légère dans vos copies. Ici, les propriétés de post-multiplication permettent de faciliter la rédaction de ces justifications.
Dans le calcul du déterminant, vous oubliez trop souvent la position du coefficient de la colonne 1 lorsque vous développez : il est en position $(n,1)$ d'où la présence d'un $(-1)^{n+1}$ souvent oublié

f. Il est regrettable que de trop nombreuses copies ne traitent pas cette question alors que c'est celle qui finalise le raisonnement de ce second problème. C'est un peu comme ci vous partiez avant le dénouement dans un film ou dans un livre...D'autant plus qu'il s'agissait de faire le bilan des questions précédentes car toutes les questions auparavant ont préparé cette question. Encore une fois, vous abordez les problèmes comme un succession de questions apparemment sans lien alors qu'il faudrait au contraire prendre du recul pour voir les liaisons entre les questions et comprendre la logique globale du problème. Je vous invite à bien reprendre cette question avec la correction.