DEVOIR MAISON Nº 2

DEUX EXERCICES D'ALGÈBRE LINÉAIRE AXÉS SUR LA DÉMONSTRATION

Les deux exercices sont totalement indépendants

1. *Une autre caractérisation de la supplémentarité*

On considère un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie.

a. Justifier que Im f est stable par f.

b. On note g l'endomorphisme induit par f sur Im f. Démontrer que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(f^2)$

c. En déduire que : $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f) - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$

d. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ ii) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$ iii) $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$

2. *Une propriété des hyperplans de $M_n(\mathbb{R})$ stables par le produit matriciel*

Soient $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et H un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ tel que H est stable par le produit matriciel.

L'objectif de l'exercice est de montrer que $I_n \in H$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que $I_n \notin H$

a. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$

b. Soit p le projecteur sur $\operatorname{Vect}(I_n)$ parallèlement à H. Prouver que, pour toutes matrices M et M′, on a : $p(MM') = p(M)p(M')$

c. Que vaut $p(I_n)$? Que vaut $p(M)$ lorsque $M \in H$?

En utilisant Q2b et en raisonnant par l'absurde, déduire que H ne contient pas de matrices inversibles.

d. Une matrice est nilpotente lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ avec $M^k = 0$. En remarquant que $p(M) = \alpha I_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et, en utilisant Q2b, prouver que $M \in \operatorname{Ker} p$ lorsque M est nilpotente. En déduire que H contient toutes les matrices nilpotentes.

e. On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficients ligne n colonne 1 qui vaut 1 et la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Prouver que A et B sont nilpotentes et calculer $\det(A + B)$.

f. En utilisant les questions précédentes, obtenir la contradiction attendue. Conclure.