Exercice — On considère un système différentiel $\begin{cases} x' = 5x - 2y \\ y' = -x + 6y \end{cases}$ Les deux lignes de ce système sont des équations différentielles faisant intervenir des fonctions $[x : t \mapsto x(t)]$ et $[y : t \mapsto y(t)]$ de la variable réelle t supposées dérivables sur $\mathbb{R}$. Une solution de ce système est un couple (x, y) de deux fonctions vérifiant simultanément les deux équations.
Dans la suite, on considère un couple (x, y) solution de ce système.

1. Justifier que x et y sont en fait deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

Par les lignes du système, $x' = 5x - 2y$ et $y' = -x + 6y$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ puisque elles sont des combinaisons linéaires de x et y qui le sont donc $\boxed{x \text{ et } y \text{ sont bien deux fois dérivables sur } \mathbb{R}}$.

2. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants vérifiée par x.
En déduire l'expression $x(t)$ d'une solution.

Il s'agit de trouver une équation de la forme $ax'' + bx' + cx = 0$ *où a, b, c sont des réels*
On dérive alors dans chacun des membres de la première ligne : $x'' = 5x' - 2y'$ En utilisant la ligne 2 :
$x'' = 5x' - 2(-x + 6y) = 5x' + 2x + 6(-2y)$ puis, en utilisant la ligne 1 de nouveau :
$x'' = 5x' + 2x + 6(x' - 5x) = 11x' - 28x$
Ainsi : $\boxed{x'' - 11x' + 28x = 0}$ L'équation caractéristique est $r^2 - 11r + 28 = 0$ de discriminant $\Delta = 121 - 4 \times 28 = 9 = 3^2$ donc de racines $\dfrac{11 \pm 3}{2}$ soit 7 et 4. L'expression de $x(t)$ est donc : $\boxed{x(t) = \mathrm{A}e^{7t} + \mathrm{B}e^{4t} \text{ où } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2}$

3. Déterminer l'expression de $y(t)$.
Attention! Le <u>raisonnement</u> précédent a été mené <u>par implication</u> : pour satisfaire réellement le système, il y a des contraintes sur les constantes introduites...Vos expressions $x(t)$ et $y(t)$ ne doivent faire intervenir que deux constantes!
On pourra penser à utiliser que la famille $\left([t \mapsto e^{4t}], [t \mapsto e^{7t}]\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

<u>Méthode n° 1</u> : On substitue l'expression $x(t)$ dans la première équation
$2y(t) = 5x(t) - x'(t) = 5\mathrm{A}e^{7t} + 5\mathrm{B}e^{4t} - 7\mathrm{A}e^{7t} - 4\mathrm{B}e^{4t} = -2\mathrm{A}e^{7t} + \mathrm{B}e^{4t} \Rightarrow \boxed{y(t) = -\mathrm{A}e^{7t} + \dfrac{\mathrm{B}}{2}e^{4t}}$
Pour assurer la réciproque, on vérifie que la seconde équation est bien satisfaite :
$$y'(t) + x(t) - 6y(t) = -7\mathrm{A}e^{7t} + 2\mathrm{B}e^{4t} + \mathrm{A}e^{7t} + \mathrm{B}e^{4t} - 6\mathrm{A}e^{7t} - 3\mathrm{B}e^{4t} = 0$$
Ainsi, $\boxed{\begin{cases} x(t) = \mathrm{A}e^{7t} + \mathrm{B}e^{4t} \\ y(t) = -\mathrm{A}e^{7t} + \frac{\mathrm{B}}{2}e^{4t} \end{cases} \text{ où } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2}$ est l'expression des solutions du système.

<u>Méthode n° 2</u> : On substitue l'expression de $x(t)$ dans seconde équation : $y' - 6y = -\mathrm{A}e^{7t} - \mathrm{B}e^{4t}$.
On reconnaît ici une équation différentielle d'ordre 1.
L'expression d'une solution homogène de ce système est $y_h(t) = \mathrm{C}e^{6t}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda e^{7t} + \mu e^{4t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ (superposition des solution et règle du second membre en $\mathrm{K}e^{mx}$ avec m non racine de l'équation caractéristique qui est ici $r - 6 = 0$) :
$\forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) - 6y_p(t) = -\mathrm{A}e^{7t} - \mathrm{B}e^{4t} \Leftrightarrow 7\lambda e^{7t} + 4\mu e^{4t} - 6\lambda e^{7t} - 6\mu e4t = -\mathrm{A}e^{7t} - \mathrm{B}e^{4t} \Leftrightarrow (\lambda + \mathrm{A})e^{7t}(-2\mu + \mathrm{B})e^{4t} = 0$
Aussi, en utilisant le fait que la famille $\left([t \mapsto e^{4t}], [t \mapsto e^{7t}]\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on obtient : $\begin{cases} \lambda + \mathrm{A} = 0 \\ -2\mu + \mathrm{B} = 0 \end{cases}$
Ainsi, l'expression de $y(t)$ est de la forme : $y(t) = \mathrm{C}e^{6t} - \mathrm{A}e^{7t} + \frac{\mathrm{B}}{2}e^{4t}$ et il reste à obtenir les contraintes liant A, B et C pour que (x, y) vérifie le système :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 7\mathrm{A}e^{7t} + 4\mathrm{B}e^{4t} = 5\mathrm{A}e^{7t} + 5\mathrm{B}e^{4t} - 2\mathrm{C}e^{6t} + 2\mathrm{A}e^{7t} - \mathrm{B}e^{4t} \\ 6\mathrm{C}e^{6t} - 7\mathrm{A}e^{7t} + 2\mathrm{B}e^{4t} = -\mathrm{A}e^{7t} - \mathrm{B}e^{4t} + 6\mathrm{C}e^{6t} - 6\mathrm{A}e^{7t} + 3\mathrm{B}e^{4t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2\mathrm{C}e^{6t} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{C} = 0$ vu que $e^{6t} \neq 0$
Ainsi, $\boxed{\begin{cases} x(t) = \mathrm{A}e^{7t} + \mathrm{B}e^{4t} \\ y(t) = -\mathrm{A}e^{7t} + \frac{\mathrm{B}}{2}e^{4t} \end{cases} \text{ où } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2}$ est l'expression des solutions du système.

<u>Méthode n° 3</u> : On cherche y de manière analogue à x : $y'' = -x' + 6y' = -(5x - 2y) + 6y' = 5(y' - 6y) + 2y + 6y' = 11y' - 28y$
On retrouve la même équation différentielle que pour x donc l'expression de $y(t)$ est : $y(t) = \alpha e^{7t} + \beta e^{4t}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
Toutefois, il reste à obtenir les contraintes sur les constantes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \alpha$ et β pour que (x, y) vérifie le système. On doit avoir :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} 7\mathrm{A}e^{7t} + 4\mathrm{B}e^{4t} = 5\mathrm{A}e^{7t} + 5\mathrm{B}e^{4t} - 2\alpha e^{7t} - 2\beta e^{4t} \\ 7\alpha e^{7t} + 4\beta e^{4t} = -\mathrm{A}e^{7t} - \mathrm{B}e^{4t} + 6\alpha e^{7t} + 6\beta e^{4t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2\mathrm{A} + 2\alpha)e^{7t} + (-\mathrm{B} + 2\beta)e^{4t} = 0 \\ (\alpha + \mathrm{A})e^{7t} + (-2\beta + \mathrm{B})e^{4t} = 0 \end{cases}$
Aussi, en utilisant le fait que la famille $\left([t \mapsto e^{4t}], [t \mapsto e^{7t}]\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on obtient :
$\begin{cases} 2\mathrm{A} + 2\alpha = 0 \\ -\mathrm{B} + 2\beta = 0 \\ \alpha + \mathrm{A} = 0 \\ -2\beta + \mathrm{B} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = -\alpha \\ \mathrm{B} = 2\beta \end{cases}$ de sorte que, finalement : $\boxed{\begin{cases} x(t) = \mathrm{A}e^{7t} + \mathrm{B}e^{4t} \\ y(t) = -\mathrm{A}e^{7t} + \frac{\mathrm{B}}{2}e^{4t} \end{cases} \text{ où } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2}$

Problème On considère l'application f définie par : $f(x) = \text{Arccos}\,\dfrac{2x}{1+x^2} + 2\,\text{Arctan}\,x + x$

1. Domaine de définition de f

(a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$

Méthode 1 : On raisonne par équivalence

$$\frac{2x}{1+x^2} \in [-1,1] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \\ \frac{2x}{1+x^2} \geqslant -1 \end{array}\right. \underset{\text{car } 1+x^2>0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 2x \leqslant 1+x^2 \\ 2x \geqslant -(1+x^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1-x)^2 \geqslant 0 \\ (1+x)^2 \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

puisque $1+x^2-2x=(1-x)^2$ et $1+x^2+2x=(1+x)^2$

autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]}$

Méthode 2 : On étudie a minima la fonction auxiliaire u où $u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ (car $1+x^2 \neq 0$) et elle est impaire puisque : $u(-x) = -u(x)$.

Par quotient, u est clairement continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $u'(x) = \dfrac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

Aussi, $u'(x)$ a le signe et les zéros de $1-x^2 = (1-x)(1+x)$.

De plus : $u(0) = \dfrac{0}{1+0^2} = 0$ et $u(1) = \dfrac{2}{1+1^2} = 1$

et : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On déduit que : $\forall x \geqslant 0,\ u(x) \in [0,1]$ de sorte que, par imparité : $\forall x \leqslant 0,\ u(x) \in [-1,0]$

et donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$

(b) Donner le domaine de définition D_f de f.

Par les théorèmes usuels, $v(x) = 2\,\text{Arctan}(x) + x$ existe pour tout x réel. D'autre part,

$$\text{Arccos}\,\frac{2x}{1+x^2} = \text{Arccos}\circ u(x) \text{ or } \left\{\begin{array}{l} \text{Arccos est définie sur } [-1,1] \\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1] \end{array}\right. \Rightarrow \text{Arccos}\circ u \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

Or : $f = \text{Arccos}\circ u + v$ donc, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathrm{D}_f = \mathbb{R}}$.

2. Symétrie de la courbe représentative

(a) Prouver que : $\forall x \in \mathrm{D}_f,\ f(-x) = \pi - f(x)$.

Le domaine $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f(-x) = \text{Arccos}\left(\frac{-2x}{1+(-x)^2}\right) + 2\,\text{Arctan}(-x) + (-x) &= \text{Arccos}\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\,\text{Arctan}(x) - x \\ &= \pi - \text{Arccos}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 2\,\text{Arctan}(x) - x = \pi - f(x) \end{aligned}$$

(b) Pour $x \in \mathrm{D}_f$, on note M_x le point d'abscisse x de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthogonal. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[\mathrm{M}_x\mathrm{M}_{-x}]$.

Par définition, M_x a pour coordonnées $\big(x, f(x)\big)$. De même, M_{-x} a pour coordonnées $\big(-x, f(-x)\big)$.

Aussi, le milieu de$[\mathrm{M}_x\mathrm{M}_{-x}]$ a pour abscisse $\dfrac{x+(-x)}{2} = 0$ et pour ordonnée $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

Pour tout x réel, $\boxed{\text{le milieu du segment } [\mathrm{M}_x\mathrm{M}_{-x}] \text{ a pour coordonnées } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$

(c) En déduire que $\mathscr{C}$ possède un centre de symétrie Ω dont on précisera les coordonnées et expliquer alors pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0,+\infty[$.

Pour x réel, $\Omega\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ est toujours le milieu de $[\mathrm{M}_x, \mathrm{M}_{-x}]$ donc $\boxed{\Omega\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ est un centre de symétrie de } \mathscr{C}}$ et $\boxed{\text{il suffit donc d'étudier } f \text{ sur } [0,+\infty[}$ car on obtient le tracé complet de $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$ par réunion du tracé sur $[0,+\infty[$ et de son symétrique par rapport au centre Ω.

3. Justifier soigneusement la continuité de f sur $[0,+\infty[$.

$$\left\{\begin{array}{l}\left[u : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}\right] \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ (car } 1+x^2 \neq 0) \\ \text{Arccos est continue sur } [-1,1] \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1] \text{ d'après 1)}\end{array}\right. \Rightarrow \text{Arccos} \circ u = \left[x \mapsto \text{Arccos}\,\dfrac{2x}{1+x^2}\right] \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Puisque les fonctions Arctan et $[x \mapsto x]$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut conclure, par somme, que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et donc aussi sur } [0,+\infty[}$.

4. Dérivabilité : On rappelle le théorème suivant (appelé théorème de la limite d'une dérivée) :

"Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a \in \mathrm{I}$ *et soit* f *est une fonction continue sur* I *et dérivable sur* $\mathrm{I}-\{a\}$,

- *si* $\lim_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *alors* f *est dérivable en* a *avec* $f'(a) = \ell$
  (éventuellement dérivable uniquement à droite ou à gauche si a *est une extrémité de* I*)*
- *si* $\lim_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$ *alors* f *n'est pas dérivable en* a
  mais la courbe représentative de f *admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse* a."

L'objectif de la question est d'établir qu'il y a un unique réel a de $[0,+\infty[$ où f n'est pas dérivable.

(a) On introduit $u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Peut-on avoir $u(x) = -1$ sur $[0,+\infty[$?
Justifier rigoureusement chacune des équivalences du raisonnement :
$$u(x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1+x^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Si $x \in [0,+\infty[$, alors $2x \geqslant 0 \Rightarrow u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \geqslant 0$ de sorte que $\boxed{\forall x \in [0;+\infty[,\ u(x) \neq -1}$.
Justifions les 3 équivalences :
— pour la première : on multiplie chacun des membres de l'inégalité par $1+x^2 > 0$ aussi l'ordre ne change pas;
— pour la seconde : on retranche $2x$ dans chacun des membres de l'inégalité or $1+x^2-2x = (1-x)^2$;
— pour la troisième : un produit de facteur est nul si l'un des facteur est nul ici il y a deux fois le facteur $(1-x)$ d'où l'unique solution $x = 1$.

(b) En utilisant le théorème de composition, déterminer l'unique réel a de $[0,+\infty[$ où f n'est éventuellement pas dérivable et prouver la dérivabilité sur $[0,a[$ et sur $]a,+\infty[$.

Par les théorèmes usuels, $v = \left[x \mapsto 2\,\text{Arctan}\,x + x\right]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
On utilise le théorème de composition pour $\text{Arccos} \circ u$:
$$\left\{\begin{array}{l}\left[u : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}\right] \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ (car } 1+x^2 \neq 0) \\ \text{la fonction Arccos est dérivable sur }]-1,1[\\ \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1] \text{ d'après 1) et : } \forall x \in [0,1[\cup]1,+\infty[,\ u(x) \neq \pm 1 \text{ d'après 4.a}\end{array}\right.$$
donc la composée $\text{Arccos} \circ u = \left[x \mapsto \text{Arccos}\,\dfrac{2x}{1+x^2}\right]$ est dérivable sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$
Finalement, f est dérivable sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et $a = 1$ est l'unique réel de $[0,+\infty[$ où f n'est éventuellement pas dérivable.

(c) Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,a[,\ f'(x) = \lambda$ et que : $\forall x > a,\ f'(x) = \dfrac{4}{1+x^2} + 1$

Pour $x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$:
$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} + \frac{2}{1+x^2} + 1 = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{-(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} + \frac{2}{1+x^2} + 1$$
vu que $\sqrt{(1+x^2)^2} = |1+x^2| = 1+x^2$ mais $(1+x^2)^2-4x^2 = 1+x^4-2x^2 = (1-x^2)^2$
$$f'(x) = -\frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} + \frac{2}{1+x^2} + 1 = -\frac{2}{1+x^2} \times \underbrace{\frac{(1-x^2)}{|1-x^2|}}_{=1 \text{ si } x<1 \text{ et } -1 \text{ si } x>1} + \frac{2}{1+x^2} + 1$$

On a donc obtenu : $\boxed{\forall x \in [0,1[,\quad f'(x) = 1}$ et $\boxed{\forall x > 1,\quad f'(x) = \dfrac{4}{1+x^2} + 1}$

(d) En déduire à l'aide du théorème de la limite d'une dérivée que f n'est pas dérivable en a mais préciser les demi-tangentes au point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}$. *Attention, il faut soigneusement vérifier et justifier les hypothèses du théorème*

D'après le théorème de la limite d'une dérivée : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathrm{I} = [0,1] \text{ (resp. } \mathrm{I} = [1,+\infty[) \\ f \text{ est dérivable sur } \mathrm{I} - \{1\} = [0,1[\text{ (resp. }]1,+\infty[) \\ f'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 1 \text{ (resp. } f'(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 3) \end{cases}$

donc f est dérivable à gauche avec $f'_g(1) = 1$ (resp. f est dérivable à droite de 1 avec $f'_d(1) = 3$)

Comme $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, $\boxed{f \text{ n'est donc pas dérivable en } 1}$

Comme f admet une dérivée à droite et à gauche en 1, on peut conclure que

$\boxed{\mathscr{C} \text{ possède des demi-tangentes (de pente 1 à gauche et 3 à droite) au point d'abscisse 1.}}$

5. Justifier et dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

Avec **4.c.**, il est évident que $f'(x) > 0$ pour $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

De plus : $f(0) = \arccos(0) + 2\arctan(0) + 0 = \frac{\pi}{2}$

$f(1) = \arccos(1) + 2\arctan(1) + 1 = \frac{\pi}{2} + 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arccos} \frac{2x}{1+x^2} = \underset{\text{par continuité de arccos}}{\frac{\pi}{2}}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
f	$\pi/2$ $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+1$	$\nearrow$ $+\infty$

6. <u>Expressions simplifiées</u>

(a) Démontrer que sur $[0,a[$ l'expression $f(x)$ est affine c'est à dire qu'il y a des constante réelles α et β qu'on précisera telles que $f(x) = \alpha x + \beta$.

$\forall x \in [0,1[,\quad f'(x) = 1 = (x)' \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1[,\ f(x) = x + k_1$ car des primitives diffèrent entre elles d'une constante. On détermine k_1 en évaluant en 0 : $f(0) = \frac{\pi}{2} = k_1$ ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ f(x) = x + \frac{\pi}{2}} \text{ d'où } \boxed{\alpha = 1 \text{ et } \beta = \frac{\pi}{2}}$$

(b) Démontrer qu'il existe un réel k qu'on déterminera tel que : $\forall x > a,\ f(x) = 4\operatorname{Arctan} x + x + k$.

De même : $\forall x > 1,\quad f'(x) = \frac{4}{1+x^2} + 1 = (4\operatorname{Arctan}(x) + x)' \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x > 1,\ f(x) = 4\operatorname{Arctan} x + x + k$

Pour déterminer k, on a deux solutions :

— Comme les deux membres de l'égalité sont continue en 1, on a pour $x \geqslant 1$, $f(x) = 4\operatorname{Arctan} x + x + k$.
En évaluant en 1 : $f(1) = \dfrac{\pi}{2} + 1 = 4 \times \dfrac{\pi}{4} + 1 + k$ soit $k = -\dfrac{\pi}{2}$

— En évaluant en $\sqrt{3}$: $\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{3}) = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{4}\right) + 2\arctan\left(\sqrt{3}\right) + \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2\dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3} \\ 4\operatorname{Arctan}\sqrt{3} + \sqrt{3} + k = 4\dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3} + k \end{array}\right\} \Rightarrow k = -\dfrac{\pi}{2}.$

Donc $\boxed{\forall x \geqslant 1,\ f(x) = 4\operatorname{Arctan} x + x - \dfrac{\pi}{2}}$.

(c) En utilisant la symétrie de $\mathscr{C}$, proposer des expressions simplifiées de $f(x)$ sur $]-a,0[$ et sur $]-\infty,-a[$.

On peut alors déterminer $f(x)$ pour x négatif en utilisant la symétrie de f :

- si $x \in]-1,0[$ alors $-x \in [0,1[$ et donc : $f(x) = \pi - f(-x) = \pi - \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2}$

- si $x \leqslant -1$ alors $-x \geqslant 1$ et : $f(x) = \pi - f(-x) = \pi - \left(4\operatorname{Arctan}(-x) - x - \frac{\pi}{2}\right) = 4\operatorname{Arctan} x + x + \frac{3\pi}{2}$

aussi $\boxed{\forall x \in]-1,0[,\ f(x) = x + \dfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant -1,\quad f(x) = 4\operatorname{Arctan} x + x + \dfrac{3\pi}{2}}$

7. Étudier la branche infinie de f lorsque x tend vers $+\infty$ à l'aide des expressions trouvées en **6.**
Préciser toutes les asymptotes à $\mathscr{C}$ et la position de $\mathscr{C}$ par rapport à celles-ci lorsque $|x| > a$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et, pour $x > 1$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{4\operatorname{Arctan}(x) + x - \frac{\pi}{2}}{x} = 1 + \dfrac{\overbrace{4\operatorname{Arctan} x - \frac{\pi}{2}}^{\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{3\pi}{2}}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

puis $f(x) - x = 4\operatorname{Arctan} x - \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{3\pi}{2}$ aussi $\boxed{\text{la droite } \mathscr{D} : y = x + \frac{3\pi}{2} \text{ est asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty}$

Et : $\forall x > 1,\ f(x) - \left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = 4\overbrace{\arctan(x)}^{<\frac{\pi}{2}} - 2\pi < 0$ donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ est située sous l'asymptote lorsque } x > 1}$.

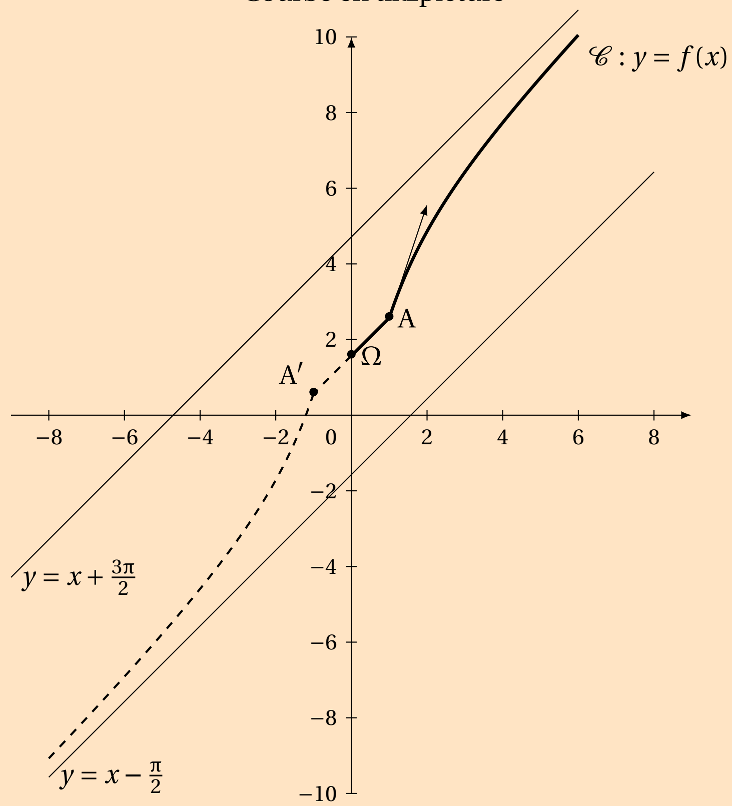
Par symétrie par rapport au point $\Omega\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on sait que $\boxed{\text{la droite } \mathscr{D}' : y = x - \frac{\pi}{2} \text{ est asymptote à } \mathfrak{C} \text{ en } -\infty}$

$\left(\mathscr{D}' \text{ passe par } M_1'\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } M_2'\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ qui sont les symétriques des deux points } M_1\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ et } M_2\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \text{ de } \mathscr{D}\right)$

et $\boxed{\mathscr{C} \text{ est située au dessus l'asymptote lorsque } x < -1}$.

8. Représenter $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal. *Vous pouvez utiliser le module* `matplotlib.pyplot` *(Python) mais vous ferez bien apparaître toutes les informations qui ont été dégagées dans cette étude.*

Courbe en tikzpicture



Exemple de code en Python

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def f(x):
    return np.arccos(2*x/(1+x**2))+2*np.arctan(x)+x
def g(x):
    return x+3*np.pi/2
def h(x):
    return x-np.pi/2
X=np.linspace(-5,5,100)
Z=np.zeros(100)
plt.axis()
plt.plot(X,Z,"k")
plt.plot(Z,X,"k")
plt.plot(X,f(X),"r", label="y=f(x)")
plt.plot(X,g(X),"g--", label="y=x+3Pi/2")
plt.plot(X,h(X),"b--",label="y=x-Pi/2")
plt.plot([-1,0,1],[f(-1),f(0),f(1)],"ok")
plt.legend(loc="best")
plt.show()
```

Exercice N'oubliez pas de préciser la nature des constantes d'intégrations introduites. Pour la question 3, le raisonnement ayant été mené en implications (je sais...donc...donc...), il est indispensable de vérifier les deux équations du système pour être assuré d'avoir les solutions !

Problème

1. Vous choisissez, en général, une approche analytique en dérivant l'expression $u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

   N'oubliez pas de justifier la dérivabilité AVANT de dériver !

   Attention, certains théorèmes usuels (quotient, composition) nécessitent de vérifier des hypothèses qu'il faut pointer dans la rédaction. Ici : « u est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient car $1+x^2 \neq 0$ pour tout x réel »

   Attention aussi à la justification des limites : utiliser plutôt des équivalents ~ à la place d'une rédaction de terminale et le résultat de croissance comparée ne doit être invoqué que s'il est VRAIMENT utilisé...

   Concernant le domaine de définition, il s'agissait d'être rigoureux. Voici les éléments qui doivent figurer dans votre justification :

   - les domaines de définition de Arccos et Arctan x doivent être rappelé

   - l'enchaînement de composition « $\forall x \in \mathrm{R},\ u(x) \in [-1,1]$ donc Arccos $u(x)$ existe »également

   Reamarque : l'existence de $u(x)$ qui nécessite d'avoir $1+x^2 \neq 0$ a déjà été (normalement) prouvée en Q1

2. Attention aux confusions : f et $f(x)$, f et $\mathscr{C}_f$, $\subset$ et $\in$, $=$ et $\Leftrightarrow$ ...

   Il est grand temps d'apprendre à maîtriser ces symboles élémentaires du vocabulaire mathématique.

   De même, que d'absurdités lues dans sur les coordonnées du point M_x ! Pourtant tout est dans l'énoncé :

   M_x est le point d'abscisse x de la courbe représentative de f autrement dit l'abscisse du point est x et son ordonnée est $f(x)$ puisque la courbe représentative de f a pour équation $y = f(x)$.

   Dans la question (c), il fallait, en particulier, expliquer qu'on obtient la portion de $\mathscr{C}_f$ sur $]-\infty, 0[$ par symétrie par rapport à Ω de la portion sur $[0,+\infty[$

3. Il s'agit ici de bien rédiger l'utilisation du théorème usuel de composition pour justifier la continuité.

   Attention à la rédaction : il ne faut pas confondre fonction (f ou $[x \mapsto f(x)]$) et expression ($f(x)$)

   La continuité, la dérivabilité, la classe C^n, la monotonie sont des propriétés de la fonction ...pas de l'expression !

   On parle plutôt, par contre, du signe et des zéros de l'expression $f(x)$ (de façon à mettre en évidence la variable x concernée.

4. En 4.a, des rédactions souvent longues/lourdes alors qu'un argument de signe était percutant. De même, pour le raisonnement en équivalence fourni, il s'agissait de trouver les arguments permettant de justifier chacune des équivalences écrites : je vous renvoie vers la correction.

   En 4.b., on ne vous demande pas seulement de trouver a mais aussi de prouver la dérivabilité de f sur $[0, a[$ et sur $]a, +\infty[$: il s'agit, là encore, d'utiliser habilement le théorème de composition. Attention, le théorème de composition ne s'applique pas en $x = a = 1$ mais cela ne veut pas dire que f n'y est pas dérivable, seulement que vous ne pouvez pas y justifier la dérivabilité avec le théorème usuel et donc qu'une étude doit être réalisé en $x = a$ (d'où la question 4d).

   D'ailleurs, beaucoup semble penser que, pour ne pas être dérivable en a, il faut nécessairement $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$ or ce n'est qu'une façon d'obtenir la non dérivabilité. Par exemple, ici, f n'est pas dérivable en a mais il y a des limites finies à droite et à gauche de $f'(x)$ qui ne sont pas les mêmes et cela donne une autre façon d'obtenir la non dérivabilité.

   En 4.c, c'est une question essentiellement calculatoire où il faut repérer des identités remarquables et ne pas oublier que $\sqrt{\mathrm{X}^2} = |\mathrm{X}|$!

   Attention aussi à ce que vous écrivez : $\mathrm{Arccos}'\big(u(x)\big) \neq \Big(\mathrm{Arccos}\big(u(x)\big)\Big)'$ puisque $\mathrm{Arccos}'\big(u(x)\big)$ est l'évaluation de Arccos' en $u(x)$ soit : $\mathrm{Arccos}'\big(u(x)\big) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u(x)^2}}$ alors que $\Big(\mathrm{Arccos}\big(u(x)\big)\Big)'$ est la dérivée de la composée : $\Big(\mathrm{Arccos}\big(u(x)\big)\Big)' = u'(x) \times \mathrm{Arccos}'\big(u(x)\big) = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$

   En 4.d, là encore, il s'agit de bien souligner et vérifier toutes les hypothèses du théorème de la limite d'une dérivée. Ce théorème vous permet de prouver l'existence de dérivée (ici à droite et à gauche). L'argument permettant de prouver la non-dérivabilité en 1 (à savoir que les dérivées à droite et à gauche sont distinctes) n'a pas souvent été pointé. Concernant les demi-tangentes, on peut, en général, se contenter de donner la pente (puisqu'ici le sujet ne demande pas des équations). Par contre, si vous choisissez d'en donner des équations,je vous rappelle qu'une équation est une égalité aussi la demi-tangente à gauche (resp. à droite) a pour équation $y = f_g'(1) \times (x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 1 \times (x-1) + \frac{\pi}{2} + 1$ (resp. $y = f_d'(1) \times (x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 3 \times (x-1) + \frac{\pi}{2} + 1$)

5. Veillez à bien justifier vos tableaux de variation.

6. Attention, dans la question 6, pour déterminer les constantes, on ne peut pas évaluer f n'importe comment. Par exemple, une évaluation en $x = 0$ ne peut pas être utilisée pour déterminer k dans l'expression $f(x) = 4\,\mathrm{Arctan}\, x + x + k$ valable pour $x > 1$. Il faut utiliser une valeur $x > 1$ (par exemple $\sqrt{3}$) ou $x = 1$ mais en le justifiant avec un argument de continuité. Attention à l'utilisation de valeurs ne conduisant pas à des valeurs remarquables des fonctions trigonométriques réciproques qui n'ont pas de validité...L'utilisation de la symétrie (en c) n'a pas toujours été bien faite : si $x \in]-a, 0]$ alors $f(x) = \pi - f(-x)$ or $-x \in [0, a[$ donc, avec l'expression du a), on a : $f(x) = \pi - \left(-x - \frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2}$

7. Il ne suffit pas de donner la position de la courbe par rapport à l'asymptote : il faut le justifier en précisant le signe de $f(x) - (mx + p)$ lorsque l'asymptote a pour équation $y = mx + p$. En général, vous ne pensez pas à exploiter le centre de symétrie pour étudier la branche infinie en $-\infty$: c'est regrettable car c'est nettement plus efficace et moins répétitif...

8. Votre courbe doit pointer les éléments mis en avant dans les questions précédentes. On doit y voir : le centre de symétrie (Q2), le point d'abscisse $a = 1$ avec les deux demi-tangentes (Q4) et les asymptotes (question 7). L'échelle choisit doit être convenable et le tracé fluide.