DEVOIR MAISON N° 1

≪ Les gens n'aiment pas penser ; c'est qu'ils ont peur de se tromper. Penser, c'est aller d'erreur en erreur. Ce qui fait que la mathématique est une épreuve redoutable, c'est qu'elle ne console point de l'erreur. Thalès, Pythagore, Archimède ne nous ont point conté leurs erreurs : nous n'avons pas connu leurs faux raisonnements et c'est bien dommage. ≫

Alain (1868-1951), philosophe et journaliste français

Exercice On considère un système différentiel $\begin{cases} x' = 5x - 2y \\ y' = -x + 6y \end{cases}$ Les deux lignes de ce système sont des équations différentielles faisant intervenir des fonctions $[x : t \mapsto x(t)]$ et $[y : t \mapsto y(t)]$ de la variable réelle t supposées dérivables sur $\mathbb{R}$. Une solution de ce système est un couple (x, y) de deux fonctions vérifiant simultanément les deux équations.
Dans la suite, on considère un couple (x, y) solution de ce système.

1. Justifier que x et y sont en fait deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$
2. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants vérifiée par x.
   En déduire l'expression $x(t)$ d'une solution.
3. Déterminer l'expression de $y(t)$.
   Attention! Le raisonnement précédent a été mené par implication : pour satisfaire réellement le système, il y a des contraintes sur les constantes introduites...Vos expressions $x(t)$ et $y(t)$ ne doivent faire intervenir que deux constantes!
   On pourra penser à utiliser que la famille $\left([t \mapsto e^{4t}], [t \mapsto e^{7t}]\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Problème On considère l'application f définie par : $f(x) = \text{Arccos}\,\dfrac{2x}{1+x^2} + 2\,\text{Arctan}\,x + x$

1. Domaine de définition de f

   (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$

   (b) Donner le domaine de définition D_f de f.

2. Symétrie de la courbe représentative

   (a) Prouver que : $\forall x \in D_f,\ f(-x) = \pi - f(x)$.

   (b) Pour $x \in D_f$, on note M_x le point d'abscisse x de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthogonal. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[M_x M_{-x}]$.

   (c) En déduire que $\mathscr{C}$ possède un centre de symétrie Ω dont on précisera les coordonnées et expliquer alors pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0,+\infty[$.

3. Justifier soigneusement la continuité de f sur $[0,+\infty[$.

4. Dérivabilité : On rappelle le théorème suivant (appelé théorème de la limite d'une dérivée) :

   "Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ et soit f est une fonction continue sur I et dérivable sur $I - \{a\}$,
   - *si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$*
     (éventuellement dérivable uniquement à droite ou à gauche si a est une extrémité de I)
   - *si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en a*
     mais la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a."

   L'objectif de la question est d'établir qu'il y a un unique réel a de $[0,+\infty[$ où f n'est pas dérivable.

   (a) On introduit $u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Peut-on avoir $u(x) = -1$ sur $[0,+\infty[$?
   Justifier rigoureusement chacune des équivalences du raisonnement :
   $$u(x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 + x^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

   (b) En utilisant le théorème de composition, déterminer l'unique réel a de $[0,+\infty[$ où f n'est éventuellement pas dérivable et prouver la dérivabilité sur $[0,a[$ et sur $]a,+\infty[$.

   (c) Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,a[,\ f'(x) = \lambda$ et que : $\forall x > a,\ f'(x) = \dfrac{4}{1+x^2} + 1$

   (d) En déduire à l'aide du théorème de la limite d'une dérivée que f n'est pas dérivable en a mais préciser les demi-tangentes au point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}$. *Attention, il faut soigneusement vérifier et justifier les hypothèses du théorème*

5. Justifier et dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

6. Expressions simplifiées

   (a) Démontrer que sur $[0,a[$ l'expression $f(x)$ est affine c'est à dire qu'il y a des constante réelles α et β qu'on précisera telles que $f(x) = \alpha x + \beta$.

   (b) Démontrer qu'il existe un réel k qu'on déterminera tel que : $\forall x > a,\ f(x) = 4\,\text{Arctan}\,x + x + k$.

   (c) En utilisant la symétrie de $\mathscr{C}$, proposer des expressions simplifiées de $f(x)$ sur $]-a,0[$ et sur $]-\infty,-a[$.

7. Étudier la branche infinie de f lorsque x tend vers $+\infty$ à l'aide des expressions trouvées en **6.**
   Préciser toutes les asymptotes à $\mathscr{C}$ et la position de $\mathscr{C}$ par rapport à celles-ci lorsque $|x| > a$.

8. Représenter $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal. *Vous pouvez utiliser le module `matplotlib.pyplot` (Python) mais vous ferez bien apparaître toutes les informations qui ont été dégagées dans cette étude.*