PT : Comprendre et interpréter le tableau des variations pour une courbe paramétrée

Le tableau commun des variations d'une courbe paramétrée est un outil indispensable pour finaliser le tracé.
On peut repérer sur ce tableau :

- les points stationnaires : où les deux dérivées s'annulent <u>en même temps</u> qu'il faut étudier
- des points où les tangentes sont parallèles aux axes :
  En particulier, les points où la tangente est horizontale : où y' s'annule mais pas x'
  et les points où la tangente est verticale : où x' s'annule mais pas y'
- les branches infinies : où l'une au moins des coordonnées part vers l'infini
  Et en particulier les asymptotes horizontales : où y part à l'infini mais pas x
  ou les asymptotes verticales : où x part à l'infini mais pas y

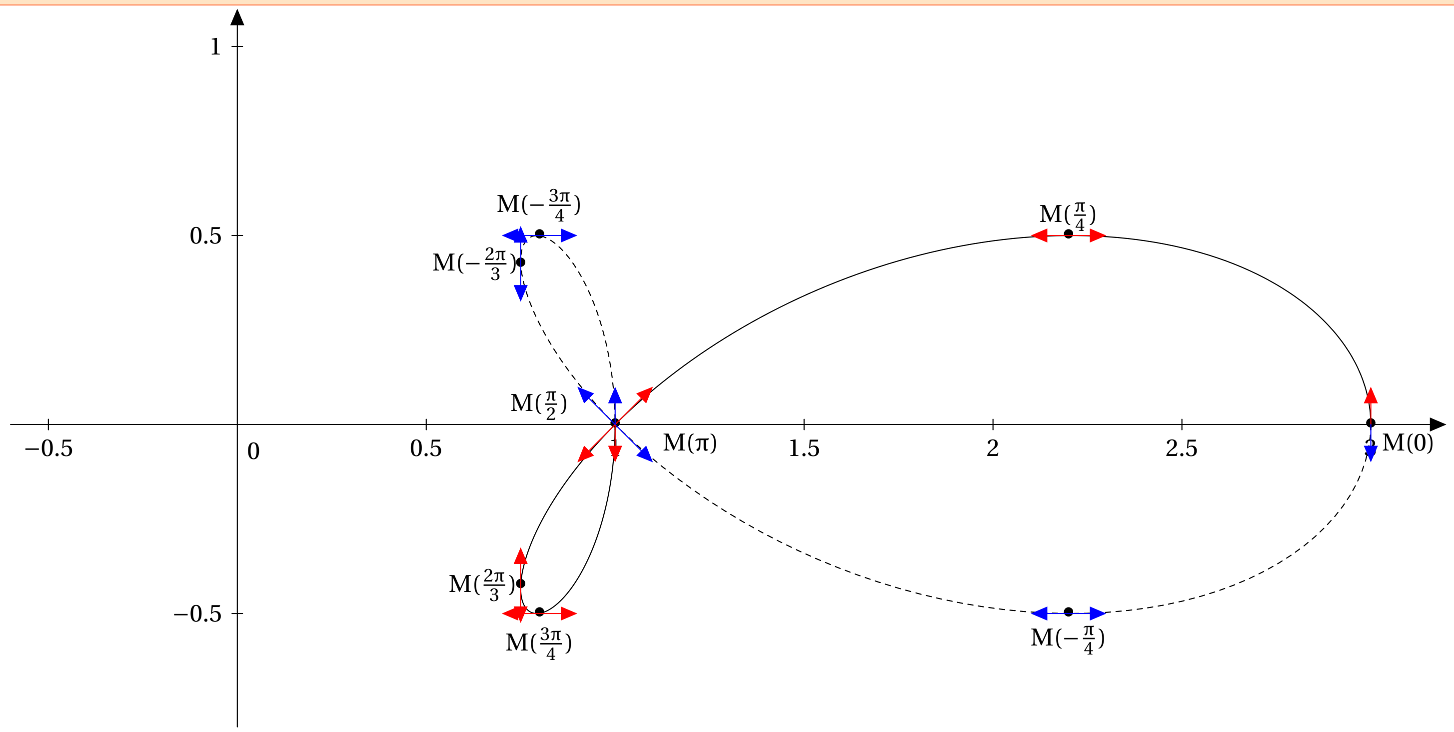
Exemples

1) Tracer la courbe $\left[t \mapsto \mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right]$ associée au tableau des variations :

t	0		$\pi/4$		$2\pi/3$		$3\pi/4$		π
$x'(t)$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0
x	3	↘	$(3+\sqrt{2})/2$	↘	$3/4$	↗	$(3-\sqrt{2})/2$	↗	1
y	0	↗	$1/2$	↘	$-\sqrt{3}/4$	↘	$-1/2$	↗	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	

On donne, en plus, que $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ pour affiner le tracé.

La courbe passe au point $\mathrm{M}(\frac{\pi}{2})$ de coordonnée $(1,0)$. C'est un point régulier : la tangente est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} x'(\pi/2) \\ y'(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Le tracé correspondant au tableau de variation est en trait plein.



Sachant que x et y sont 2π périodique, que x est paire et y impaire. Tracer la courbe complète lorsque $t \in \mathbb{R}$

Les points $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $(\mathrm{O}x)$. Le tracé en pointillé donne la courbe pour $t \in [-\pi, 0]$
Par périodicité, puisque $[-\pi, \pi]$ est d'amplitude 2π, on a la totalité du tracé pour $t \in \mathbb{R}$

2) Tracer la courbe $\left[t \mapsto \mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right]$ associée au tableau des variations :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x			-1		$\Vert$ $+\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				$-\infty$ $\Vert$		1		
y	0	$\searrow$			$\Vert$		1		
			-3		$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	
				$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$				0
$y'(t)$		$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On admettra que : $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to 0^{\mp}]{} \pm\infty$ et que : $\begin{pmatrix} x(1+h) \\ y(1+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \dfrac{h^3}{6}\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix}$

• Il y a un point stationnaire M(1) pour $t = 1$ de coordonnées $(1, 1)$ et, d'après le DL vectoriel donné :

- la tangente en M(1) est dirigée par $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ avec $p = 2$ - la dérivée non colinéaire suivante est pour $q = 3$ ($\vec{q} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 2 \end{pmatrix}$)

Il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

• La tangente en M(−1) de coordonnées $(-1, -3)$ est verticale

• Lorsque $t \to -\infty$, l'axe des ordonnées est une asymptote verticale et la courbe est située en bas à gauche de l'asymptote.

• Lorsque $t \to +\infty$, l'axe des ordonnées est une asymptote verticale et la courbe est située en haut à droite de l'asymptote.

• Lorsque $t \to 0$, il y a deux branches paraboliques dans la direction de l'axe $(\mathrm{O}y)$