PT : Comprendre et interpréter le tableau des variations pour une courbe paramétrée

Le tableau commun des variations d'une courbe paramétrée est un outil indispensable pour finaliser le tracé.
On peut repérer sur ce tableau :

— les points stationnaires :

— des points où les tangentes sont parallèles aux axes :
En particulier, les points où la tangente est horizontale :
et les points où la tangente est verticale :

— les branches infinies :
Et en particulier les asymptotes horizontales :
ou les asymptotes verticales :

Exemples

1) Tracer la courbe $\left[t \mapsto \mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right]$ associée au tableau des variations :

t	0		$\pi/4$		$2\pi/3$		$3\pi/4$		π
$x'(t)$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0
x	3	↘	$(3+\sqrt{2})/2$	↘	$3/4$	↗	$(3-\sqrt{2})/2$	↗	1
y	0	↗	$1/2$	↘	$-\sqrt{3}/4$	↘	$-1/2$	↗	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	

On donne, en plus, que $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0,\ x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ pour affiner le tracé.

Sachant que x et y sont 2π périodique, que x est paire et y impaire. Tracer la courbe complète lorsque $t \in \mathbb{R}$

2) Tracer la courbe $\left[t \mapsto \mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right]$ associée au tableau des variations :

t	$-\infty$		-1			0			1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$\Vert$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	$\vert$	$-$		$\Vert$		$+$	0	$-$	

On admettra que : $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to 0^{\mp}]{} \pm\infty$ et que : $\begin{pmatrix} x(1+h) \\ y(1+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \dfrac{h^3}{6} \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix}$