PT : Exemple fondamental de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ qui converge sans converger absolument

- $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$ *On pourra utiliser une intégration par partie*

La fonction $\left[f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}\right]$ est C^0 sur $[1,+\infty[$ (car $t \neq 0$)mais elle n'y est pas positive.

On montrera, dans la suite, que cette fonction n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$: on ne peut donc pas obtenir la convergence via la convergence absolue. On ne peut pas envisager d'utiliser un théorème de comparaison (critère d'équivalence ou majoration ou règle du o) car ce n'est pas une fonction positive. La seule alternative est donc d'utiliser une IPP ou un changement de variables.

Sous réserve que c'est possible, on réalise une intégration par parties (IPP) avec :

$$\text{avec : } \begin{cases} u'(t) = \sin t & u(t) = -\cos t \\ v(t) = \dfrac{1}{t} & v'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{cases} \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [1,+\infty[$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

$[*]$ $\left[-\dfrac{\cos t}{t}\right]_1^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{\cos t}{t}\right) + \cos(1)$ or $\left|-\dfrac{\cos t}{t}\right| \leqslant \dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\left[-\dfrac{\cos t}{t}\right]_1^{+\infty}$ converge vers $0+\cos(1)$

L'intégration par parties est donc pertinente et on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont la même nature.

Or : $0 \leqslant \left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\left[t \mapsto \dfrac{1}{t^2}\right]$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha > 1$)

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car elle converge absolument. Par conséquent : $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$

Attention! C'est la nature (CV ou DV) qui est la même...La CVA ne se transmet pas par l'IPP puisque nous allons montrer ensuite que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

- $\boxed{\text{La fonction } \left[f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}\right] \text{ n'est pas intégrable sur } [1,+\infty[}$ ou $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

Il s'agit d'établir que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (DV) Or : $|\sin t| \in [0,1] \Rightarrow |\sin t| \geqslant \sin^2 t$ (car $x^2 \leqslant x$ si $x \in [0,1]$)

Il suffit donc, par minoration, d'établir que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ DV pour conclure que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ DV

Mais $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ donc, pourA > 1 : $\displaystyle\int_1^{A}\frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{A}\frac{1-\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{A}\frac{\cos(2t)}{(2t)}\,\mathrm{d}t$

On sait déjà que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 1 \leqslant 1$) soit $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty$

Avec une IPP, on peut prouver que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ CV et donc que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$

De ce fait, par somme : $\displaystyle\int_1^{A}\frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ DV $\Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t \text{ DV}}$

En effet, par IPP dans $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ avec $\begin{cases} u'(t) = \cos(2t) & u(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \\ v(t) = \dfrac{1}{2t} & v'(t) = -\dfrac{1}{2t^2} \end{cases}$ où u et v sont C^1 sur $[1,+\infty[$

et sous réserve que cela soit possible : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2t)}{4t}\right]_0^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t$ Or : $\left|\dfrac{\sin(2t)}{4t}\right| \leqslant \dfrac{1}{4t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

donc : $\left[\dfrac{\sin(2t)}{4t}\right]_0^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sin(2t)}{4t} - 0 = 0$ et alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ a la même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t$

or $\left|\dfrac{\sin(2t)}{4t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{4t^2}$ et $\left[t \mapsto \dfrac{1}{4t^2}\right]$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car elle converge absolument.