PT : Raisonnement par récurrence

Une démonstration par récurrence permet de démontrer un résultat de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant n_0,\ \mathrm{HR}_n \text{ est vraie}$$

HR_n est une proposition qui dépend de l'entier n qu'on appelle l'hypothèse de récurrence.

Exemples

- l'hypothèse HR_n : « $u_n = 2+2^n$ » permet de prouver par récurrence simple l'expression explicite du terme général de la suite (u_n) vérifiant $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}$
- l'hypothèse HR_n : « La famille $\left(\left[x \mapsto e^{kx}\right]\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ » permet d'obtenir, par récurrence, que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie puisqu'on peut y trouver des familles libres de cardinal quelconque

La formulation explicite et rigoureuse de l'hypothèse HR_n est fondamentale pour réaliser la démonstration.
Attention ! Pas de $\forall n$ au début de la formulation car cela conduit à un raisonnement fallacieux (je suppose vrai ce que je veux prouver pour le prouver...)

La suite du raisonnement est en trois étapes :

• Initialisation On prouve un nombre suffisant de proposition initiale.
Pour une récurrence simple : on prouve la proposition HR_{n_0} (le plus souvent $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$)
Pour une récurrence double : on prouve les proposition HR_{n_0} et HR_{n_0+1}

• Hérédité On prouve une implication mathématique
Pour une récurrence simple : on prouve $\mathrm{HR}_n \Rightarrow \mathrm{HR}_{n+1}$
autrement dit *on suppose* HR_n *vraie et on prouve que* HR_{n+1} *est alors vraie*
Pour une récurrence double : on prouve $\begin{cases} \mathrm{HR}_n \\ \mathrm{HR}_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{HR}_{n+2}$
autrement dit *on suppose* HR_n *et* HR_{n+1} *vraies et on prouve que* HR_{n+2} *est alors vraie*
Pour une récurrence forte : on prouve $\left(\forall n \in [\![n_0, n]\!],\ \mathrm{HR}_n\right) \Rightarrow \mathrm{HR}_{n+1}$
soit *on suppose que la proposition vraie pour tous les prédécesseurs avant n et on prouve que* HR_{n+1} *est alors vraie*

• Conclusion On conclut par récurrence simple (resp double ou forte) que : $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, HR_n est vraie
Bien vérifier, selon le principe invoqué, que le nombre de pas d'itération et l'implication d'hérédité sont adaptés !

Quelques exemples

EXEMPLE N° 1 Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$.
Donner l'expression du terme général u_n de cette suite en commençant par rechercher une conjecture sur les premiers termes.

EXEMPLE N° 2 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que la suite est strictement croissante.

EXEMPLE N° 3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n)$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant n!$.

EXEMPLE N° 4 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

EXEMPLE N° 5 À l'aide d'une récurrence forte (ou généralisée), démontrer que
tout nombre entier $n \geqslant 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.
Rappel : un nombre est premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

EXEMPLE N° 1 Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$.
Donner l'expression du terme général u_n de cette suite en commençant par rechercher une conjecture sur les premiers termes.

On calcule les premiers termes :
$u_1 = \dfrac{u_0}{u_0+2}$, $u_2 = \dfrac{\frac{u_0}{u_0+2}}{\frac{u_0}{u_0+2}+2} = \dfrac{u_0}{3u_0+4}$, $u_3 = \dfrac{\frac{u_0}{3u_0+4}}{\frac{u_0}{3u_0+4}+2} = \dfrac{u_0}{7u_0+8}$...On conjecture que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{u_0}{(2^n-1)u_0+2^n}}$.
Prouvons le par récurrence simple avec l'hypothèse de récurrence à l'ordre n entier donnée par :

$$\mathrm{HR}_n :\ u_n = \frac{u_0}{(2^n-1)u_0+2^n}$$

<u>Initialisation</u> : Pour $n=0$, $\dfrac{u_0}{(2^0-1)u_0+2^0} = \dfrac{u_0}{0\times u_0+1} = u_0$ donc HR_0 est vraie.
<u>Hérédité</u> On prouve que $\mathrm{HR}_n \Rightarrow \mathrm{HR}_{n+1}$ aussi on suppose HR_n vraie et on prouve qu'alors HR_{n+1} est aussi vraie.
Or : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2} = \dfrac{\frac{u_0}{(2^n-1)u_0+2^n}}{\frac{u_0}{(2^n-1)u_0+2^n}+2} = \dfrac{u_0}{u_0+2\big((2^n-1)u_0+2^n\big)} = \dfrac{u_0}{(2^{n+1}-1)u_0+2^{n+1}}$ donc HR_{n+1} est vérifiée.
<u>Conclusion</u> : Par principe de récurrence simple, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{u_0}{(2^n-1)u_0+2^n}$.

EXEMPLE N° 2 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que la suite est strictement croissante.

Il s'agit de justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$
Soit l'hypothèse de récurrence à l'ordre n entier donné par HR_n : « $u_{n+1} < u_n$ »
<u>Initialisation</u> On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \simeq 1,41$ aussi $u_1 > u_0$ et HR_0 est vraie
<u>Hérédité</u> : On prouve $\mathrm{HR}_n \Rightarrow \mathrm{HR}_{n+1}$. Aussi, on suppose que $u_{n+1} < u_n$ et on montre que $u_{n+2} < u_{n+1}$
Or : $u_{n+1} < u_n \Rightarrow 1+u_{n+1} < 1+u_n \Rightarrow \underbrace{\sqrt{1+u_{n+1}}}_{u_{n+2}} < \underbrace{\sqrt{1+u_n}}_{u_{n+1}}$ par croissance de la racine

Ainsi, on a $u_{n+2} < u_{n+1}$ autrement dit HR_{n+2} est vérifiée.
<u>Conclusion</u> : Par récurrence simple, on a justifié que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$ autrement dit que (u_n) est strictement croissante.

EXEMPLE N° 3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = n(u_{n+1}+u_n)$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant n!$.

Soit l'hypothèse HR_n de récurrence pour sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ donné par HR_n « $u_n \leqslant n!$ »
Montrons que HR_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par une récurrence double sur n :
<u>Initialisation</u> : $u_1 = 1 \leqslant 1!$ et $u_2 = 1 \leqslant 1!$ donc HR_1 et HR_2 sont vraies.
<u>Hérédité</u> : On prouve : $\begin{cases} \mathrm{HR}_n \\ \mathrm{HR}_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{HR}_{n+2}$ aussi on suppose HR_n et HR_{n+1} vraies pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on prouve que HR_{n+2} l'est aussi. On sait que :
$u_{n+2} = n\big(u_{n+1}+u_n\big) \leqslant n\big((n+1)!+n!\big) = n\big((n+1)\times n!+n!\big) = \big(n(n+1)+n\big)n! = (n^2+2n)n!$
Il s'agit donc de comparer $\big(n^2+2n\big)$ avec $(n+2)(n+1)$ (pour obtenir une majoration par $(n+2)(n+1)n! = (n+2)!$).
Or $(n+2)(n+1) = n^2+3n+2 = n^2+2n+\underbrace{n+2}_{>0} > n^2+2n$ vu que $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+2} \leqslant (n+2)(n+1)n! = (n+2)!$.

Ainsi HR_{n+2} est bien vérifiée.
<u>Conclusion</u> : Par récurrence double, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant n!$.

EXEMPLE N° 4 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Soit l'hypothèse de récurrence à l'ordre n donnée par HR_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

Initialisation : Pour $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1+k}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ donc HR_1 est vraie

Hérédité On prouve que $\mathrm{HR}_n\Rightarrow\mathrm{HR}_{n+1}$ aussi on suppose HR_n vraie et on prouve qu'alors HR_{n+1} est aussi vraie

Il s'agit donc de prouver : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1+k}$. Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2}$

Aussi, en utilisant HR_n et le fait que $(-1)^{2n}=1$ et $(-1)^{2n+1}=-1$, on a :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$ On pose $k=p+1$ dans la somme :

$$\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+p+1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+1+p}+\frac{1}{\underbrace{n+1+n}_{\text{terme } p=n}}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{n+1+p}-\frac{1}{2n+2}$$

Mais alors, en ajoutant puis en retranchant le terme en $p=n+1$ manquant et en isolant le terme $p=0$ on a :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\frac{1}{n+1}+\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+p}-\frac{1}{n+1+n+1}-\frac{1}{2n+2}=\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+p}$ donc HR_{n+1} est vérifiée

Conclusion Par principe de récurrence simple, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

EXEMPLE N° 5 A l'aide d'une récurrence forte (ou généralisée), démontrer que tout nombre entier $n\geqslant 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.

Rappel : un nombre est premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Soit l'hypothèse de récurrence à l'ordre n où $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ donnée par HR_n : « n s'écrit comme un produit de nombre premier »

Initialisation HR_2 est vérifiée puisque 2 est un produit à un seul terme qui vaut 2 or 2 est bien un nombre premier.

Hérédité On prouve $\left(\forall k\in[\![2,n]\!],\ \mathrm{HR}_k \text{ vraie}\right)\Rightarrow\ \mathrm{HR}_{n+1}$ est vraie.

Considérons l'entier $n+1$, il y a alors deux alternatives :

- soit $n+1$ est un nombre premier et donc c'est un bien produit (à 1 terme) de nombre premier
- soit $n+1$ n'est pas un nombre premier et, par définition, il s'écrit $n+1=k_1\times k_2$ où $(k_1,k_2)\in[\![2,n]\!]^2$ est un couple de diviseurs. En effet, $n+1$ doit admettre un diviseur k_1 distincts de 1 et de lui-même donc dans $[\![2,nff$ et l'égalité de division $n+1=k_1\times k_2$ induit que $k_2\in[\![2,n]\!]$ également. On peut alors utiliser les propriétés HR_{k_1} et HR_{k_2} qui permettent d'écrire k_1 et k_2 comme des produits de nombres premiers puis, en combinant avec l'égalité $n+1=k_1\times k_2$, on a bien obtenu que $n+1$ est aussi un produit de nombres premiers. Aussi, HR_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : On a justifié, par une récurrence forme, que $\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, HR_n est vraie donc que tout nombre entier $n\geqslant 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.