PT : Méthodologie pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée $\int_I f(t)\mathrm{d}t$

1. On commence par un argument de continuité sur f : il s'agit d'appliquer les théorèmes usuels pour identifier les différents problèmes de convergence. Pensez à donner les hypothèses utiles induites par les théorèmes usuels de quotient/composition et par les fonctions en présences dans l'intégrande.

2. On étudie séparément les différents problèmes :

S'il y a divergence en l'une de singularité, alors l'intégrale est divergente

Il n'est pas nécessaire de poursuivre l'étude !

On concluera (à la fin) en scindant judicieusement l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles.

3. Si on identifie, dans l'intégrande, une primitive usuelle alors on revient à la définition :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(t)\mathrm{d}t, \qquad \int_0^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b f(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{etc...}$$

4. Si l'intégrande n'est pas positive, alors

- soit on étudie l'intégrabilité de f autrement dit la convergence de $\int_I |f(t)|\mathrm{d}t$ (convergence absolue de $\int_I f(t)\mathrm{d}t$)
- soit on utilise un théorème (changement de variable, IPP) avec souvent une indication dans le sujet et éventuellement en revenant au préalable à la définition.

5.
- Si la singularité est en un $a\in\mathbb{R}$ alors on peut envisager le cas d'une intégrale faussement généralisée en prolongeant par continuité f en a avec $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$ si cette limite est réelle (Cela nécessite bien souvent de rechercher un équivalent)
- Si la singularité est en un $a = +\infty$ (analogue en $-\infty$) **Attention ! Pas de prolongement continue en $+\infty$!**

  $\lim_{t\to a} f(t) = +\infty$ n'implique pas la divergence (Par exemple : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ CV et pourtant $\frac{1}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to0^+]{} +\infty$)

  Toutefois, pour espérer l'intégrabilité de f en $+\infty$, il est nécessaire que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ (analogue à la divergence grossière). Toutefois, cette condition nécessaire n'est pas au programme aussi il faut refaire un raisonnement par minoration à chaque fois :

  si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in]0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ alors $\exists A>0, \forall t\geqslant A,\ f(t)\geqslant \frac{\ell}{2}$ (ou 1 si $\ell = +\infty$)

  mais $\int_A^{+\infty}\frac{\ell}{2}\mathrm{d}t$ DV car : $\int_A^{+\infty}\frac{\ell}{2}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\int_A^X \frac{\ell}{2}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ell}{2}(X-A) = +\infty$
- Si on peut obtenir un équivalent de f (parce qu'on reconnaît des équivalents/DL usuels) alors on peut utiliser éventuellement un critère d'équivalence (Ne pas oublier l'hypothèse de signe, réglée éventuellement CVA)
- Si on peut facilement majorer/minorer f (parce qu'on reconnaît des fonctions usuelles ($|\cos|$, $|\sin|$, Arctan, Arcsin ou Arccos) ou parce que le sujet nous propose une inégalité), alors on peut utiliser éventuellement un théorème de majoration/minoration.

6. En dernier recours, on essaye de « conjecturer » la nature de l'intégrale et on applique la règle du o

On cherche une domination par une fonction de référence en rapport avec l'expression $f(t)$,

- on choisit α (>1 si pb en $+\infty$ mais <1 si pb en 0) avec $t^\alpha|f(t)|\to 0 \Leftrightarrow |f(t)| = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ et $\int_I \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ CV
- on choisit $\alpha>0$ (si pb en $+\infty$) avec $e^{\alpha t}|f(t)| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow |f(t)| = o(e^{-\alpha t})$ et $\int_I e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ CV
- $\frac{|f(t)|}{|\ln t|} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \Leftrightarrow |f(t)| = o_0(|\ln t|)$ et $\int_{]0,1]} |\ln t|\mathrm{d}t = -\int_{]0,1]} (\ln t)\mathrm{d}t$ CV

- Si le sujet l'indique, on utilise une intégration par parties et/ou un changement de variables, le plus souvent pour calculer la valeur de l'intégrale.