MÉTHODE : **Prouver que f est DSE à l'aide de la technique de l'équation différentielle**

Étant donné une fonction f dont on cherche à prouver qu'elle admet un DSE et à déterminer celui-ci.
• On remarque (ou on nous aide à remarquer) que f est solution d'un problème de Cauchy autrement dit que
- f est solution sur un intervalle I d'une équation différentielle (E) (linéaire d'ordre 1 ou 2)
- on dispose d'un nombre suffisant de condition(s) initiale(s) CI (à savoir $f(0)$ si ordre 1, $f(0)$ et $f'(0)$ si ordre 2)

• On recherche une solution DSE de l'équation différentielle (E) sous la forme $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $R>0$
- avec le théorème de dérivation terme à terme, on calcule les dérivées $y'(x)$ et $y''(x)$
- on injecte ces dérivées dans (E), on distribue les coefficients polynômiaux et on réalise des changements d'indices dans les sommes pour ramener dans chacune d'elle la puissance en x^k (attention aux débuts d'indiçages parfois fictifs des sommes)
- on regroupe les sommes par linéarité en une seule somme quitte à isoler certains termes qui ne sont pas dans les indices communs à toutes les sommes
- on obtient une relation de récurrence entre les coefficients (a_n) à l'aide de l'unicité du DSE
- les CI ou bien les termes isolés permettent de fixer certains des coefficients de la suites (a_n) et de déduire parfois que la série est lacunaire (disparition de tous les termes paires par exemple..) (Rappel : $a_0=y(0)$, $a_1=y'(0),\dots,a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$)
L'évaluation en $x=0$ de l'équation différentielle peut parfois permettre d'établir des conditions sur les premiers coefficients. - on ne doit pas oublier de vérifier que le rayon de convergence $R>0$ (autrement dit qu'il y a bien des solutions DSE) En général, il suffit d'appliquer la règle de d'Alembert en utilisant directement la relation de récurrence sur les coefficients.
- on obtient l'expression des coefficients par itération de la relation de récurrence (ne pas hésiter à faire plusieurs pas d'itération avant de conjecturer l'expression et penser à introduire des factorielles)

• Si $I\cap]-R,R[\neq\emptyset$, on dispose alors de 2 solutions à un même problème de Cauchy qui n'admet qu'une solution ce qui permet en général d'établir que $f(x)=y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r,r[=I\cap]-R,R[$ justifiant que f est DSE et donnant le DSE associé.