MÉTHODE : **Comment calculer le rayon de convergence d'une série entière ?**

Étant donné une série entière $\sum a_n x^n$ dont on demande le rayon de convergence R

1. On commence par « simplifier » le problème en utilisant le cours ou un équivalent
   Outil n°1 : Si $a_n \sim_{+\infty} b_n$ alors $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont le même rayon de convergence.
   Outil n°2 : Les séries $\sum n a_n x^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} x^n$ ont le même rayon de convergence que la série $\sum a_n x^n$
   Outil n°3 : Les séries $\sum n^\alpha x^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ ont un rayon de convergence qui vaut 1
2. On utilise la règle de d'Alembert en calculant le quotient de deux termes consécutifs de la série.
3. Si le quotient de d'Alembert ne se simplifie pas, on peut
   - utiliser des majoration/minoration de $|a_n|$ pour minorer/majorer le rayon de convergence R
   - utiliser des convergences/divergences ponctuelles de la série pour minorer/majorer le rayon de convergence R

MÉTHODE : **Comment calculer la somme d'une série entière ?**

Pour calculer la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une série entière,

1. On commence par déterminer le rayon de convergence R de cette série entière de sorte que le calcul de $S(x)$ sera fait pour $|x| < R$
2. Le calcul de $S(x)$ se fera probablement à l'aide :
   - de série associée à la série géométrique $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{si } |x|<1}$ lorsque R est un réel non nul.
   - de série associée à la série exponentielle $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}}$ lorsque $R = +\infty$

   Il s'agit ensuite de repérer

   – un changement de variables (Bien vérifier la condition de convergence induite par le rayon de convergence)
   – une utilisation du théorème de dérivation terme à terme quitte à faire intervenir des combinaisons linéaires de $1,\ n,\ n(n-1),\ n(n-1)(n-2),\ \ldots$ pour exprimer un coefficient polynômiale $P(n) = a\times 1 + b\times n + c\times n(n-1) + \ldots$
   où a, b, c sont des réels à déterminer
   – une utilisation du théorème d'intégration terme à terme quitte à faire plusieurs intégration pour gérer les coefficients $\frac{1}{n+1},\quad \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \ldots$
   – un produit de Cauchy en exprimant le coefficient sous la forme $c_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$ où on reconnaît des séries entières $\sum \alpha_n x^n$ et $\sum \beta_n x^n$ connues

Exemples à connaître : $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $|x|<1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ lorsqu'elle existe

• Pour les trois premières séries, on sait d'après le cours (cf. outil n°3) que ces séries ont le même rayon de convergence qui vaut R = 1. On calcule donc les sommes pour $|x|<1$.

• Si on applique le théorème de dérivation terme à terme à la série géométrique, on a, pour $|x|<1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Ici : $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n}_{\text{le terme d'indice } n=0 \text{ est nul}} \underbrace{= x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}\right)}_{\text{la factorisation par } x \text{ est possible}} = x \times \frac{1}{(1-x)^2} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ pour } |x|<1}$

Et : $n^2 = n(n-1) + n$ (On peut bien souvent éviter une méthode de coefficients indéterminés pour déterminer $n^2 = an(n-1) + bn + c$).

aussi : $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(n(n-1) + n\big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(n(n-1)x^n + n x^n\big)$

On peut séparer les sommes car ici toutes les sommes convergent pour $|x|<1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=\cancel{0}2}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=\cancel{0}1}^{+\infty} n x^n$$ On peut modifier l'indice de départ car les premiers termes de ces sommes sont nuls

$$= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$ par factorisation possible dans les sommes

$$= x^2 \times \frac{2}{(1-x)^3} + x \times \frac{1}{(1-x)^2}$$

• Si on applique le théorème d'intégration terme à terme à la série géométrique, on a, pour $|x|<1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \big[-\ln(1-t)\big]_0^x = -\ln(1-x)$$

Ainsi : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) \text{ pour } |x|<1}$

en posant $n = k+1 \Leftrightarrow k = n-1$

• Calculons la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. On vient de voir que : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

La fonction S est la somme d'une série entière donc on sait qu'elle est continue sur son domaine de définition.

Or, la fonction S est définie sur $[-1,1[$ puisque la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le théorème des séries alternées permettant de définir $S(-1)$. Par continuité : $S(-1) = \lim_{x\to -1^+} S(x) = \lim_{x\to -1^+} \big(-\ln(1-x)\big) = -\ln 2$ soit $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2}$.

• Calculons le rayon de convergence R de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ avec la règle de d'Alembert avec $u_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{n+1}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}}\right| = \frac{n}{n+1}|x|^2 \sim_{n\to+\infty} |x|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^2$$

$\left.\begin{array}{l}\text{Si } |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \text{ alors la série CVA donc } R \geqslant 1 \\ \text{Si } |x|^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \text{ alors la série DVG donc } R \leqslant 1\end{array}\right\} \Rightarrow R = 1$

Pour le calcul de la somme pour $|x|<1$, on remarque : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n}$

Mais : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} = -\ln(1-u)$ pour $|u|<1$ aussi pour $u = -x^2$ puisque $|u| = |x|^2 < 1$ vu que $|x|<1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} = -\ln\big(1-(-x^2)\big) = -\ln(1+x^2) \quad \text{pour } |x|<1$$