

MÉTHODOLOGIE : JUSTIFIER LE SIGNE ET LES ZÉROS D'UN TABLEAU DE VARIATION

MÉTHODOLOGIE : TRACER LA COURBE À PARTIR DU TABLEAU COMMUN DE VARIATIONS

- Lorsqu'on étudie le signe d'une expression, il faut **réduire au même dénominateur** et **factoriser au maximum**.
 - On élimine alors les termes dont on maîtrise le signe pour se concentrer sur les autres termes.
Attention toutefois à ne pas oublier les valeurs interdites
 - On connaît le signe d'expression affine (type $ax + b$) ou du second degré (type $ax^2 + bx + c$) ou qui de terme construit sur des fonctions usuelles (ch $x - 1 \geq 0, \ln(1 - x^2) \leq 0$ pour $x \in]-1, 1[$, $x^3 - 1 > 0$ si $x > 1$, $\sin x \geq 0$ si $x \in [0, \pi]$, $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0$ si $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, etc...)
 - Lorsque le signe dépend de plusieurs termes, on obtient le signe global à l'aide d'un **tableau de signe**
 - Quand on ne peut pas factoriser, il est fort probable qu'il s'agit d'une somme de termes de signe constant.
- On commence par placer les axes et les graduations en examinant les valeurs prises par x et y
S'il y a des unités imposées par le sujet, on respecte ces unités. **Les axes ne sont pas forcément ortho­normés**.
 - On place tous les points à tangentes remarquables (parallèles aux axes ou stationnaires) et, plus généralement, tous les points qui sont pointés par le sujet. On place aussi les tangentes en ces points.
 - On place toutes les asymptotes repérées lors de l'étude et, au crayon à papier, on positionne localement la courbe.
Attention, ce positionnement initial est susceptible d'évoluer lorsqu'on finalise le tracé final...
 - On trace une esquisse de la courbe en suivante, pas à pas, l'évolution de celle-ci dans le tableau commun des variations.

Exemples

1) Signe et zéros de $x'(t) = t - \frac{1}{t^2}$: $x'(t) = \frac{t^3 - 1}{t^2}$: a le signe et les zéros de $t^3 - 1$ soit $\frac{t^3 - 1}{t^2}$ $\begin{matrix} >0 \\ - & || & - & 0 & + \end{matrix}$

2) Signe et zéros de $x'(t) = t + 2 - \frac{2}{t^2}$: $x'(t) = \frac{t^3 + 2t^2 - t - 2}{t^2}$: a le signe et les zéros du numérateur.
 $\frac{t^3 + 2t^2 - t - 2}{t^2}$ $\begin{matrix} >0 \\ - & - & 0 & - & || & - & 0 & + \end{matrix}$

On repère que 1 est une racine évidente : $t^3 + 2t^2 - t - 2 = (t - 1)(t^2 + 3t + 2) = (t - 1)(t + 2)(t + 1)$ en factorisant l'expression du second degré. On dresse alors un tableau de signe pour conclure. Voici un tableau possible mais il y en a d'autre :

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$t + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0
$x'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

3) Signe et zéros de $x'(t) = \sin^2 t + \ln(1 + t^2)$: L'expression est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $1 + t^2 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On ne repère pas de factorisation mais $x'(t) = \underbrace{\sin^2 t + \ln(1 + t^2)}_{\geq 0}$ donc $x'(t) \geq 0$

Une somme de termes positifs est nulle si chacun des termes est nul donc :

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 t = 0$ et $\ln(1 + t^2) = 0 \Leftrightarrow t \equiv 0[\pi]$ et $1 + t^2 = 1 \Leftrightarrow t \equiv 0[\pi]$ et $t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ d'où $\frac{t}{x'(t)}$ $\begin{matrix} t & -\infty & 0 & +\infty \\ x'(t) & 0 & - & 0 & + \end{matrix}$

4) Signe et zéros de $x'(t) = 2 \cos^2 t - 3 \cos t + 1$ sur $[0, \pi]$:

On remarque que $x'(t) = P(\cos t)$ où $P(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)(x - \frac{1}{2})$ en factorisant le polynôme du second degré.

Alors : $x'(t) = 2 \underbrace{(\cos t - 1)}_{\leq 0} (\cos t - \frac{1}{2})$ a le signe de $\frac{1}{2} - \cos t$ sur $[0, \pi]$ soit : $x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \cos t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$

et, sur $[0, \pi]$: $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1$ ou $\cos t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{3}$ d'où $\frac{t}{x'(t)}$ $\begin{matrix} t & 0 & \pi/3 & \pi \\ x'(t) & 0 & - & 0 & + \end{matrix}$

5) Signe et zéros de $x'(t) = (\ln t)^3 + 2(\ln t)^2 + 2(\ln t) + 1$: L'expression est définie sur $]0, +\infty[$.

$x'(t) = P(\ln t)$ où $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$ On repère une racine évidente et on factorise cette racine

Or : $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout x réel (car $\Delta < 0$) aussi : $x'(t) = (\ln t + 1) \underbrace{((\ln t)^2 + (\ln t) + 1)}_{>0}$ a le signe et les zéros de $\ln t + 1$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln t = -1 \Leftrightarrow t = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $x'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$ d'où $\frac{t}{x'(t)}$ $\begin{matrix} t & 0 & 1/e & +\infty \\ x'(t) & || & - & 0 & + \end{matrix}$

6) Signe et zéros de $x'(t) = \text{sh}(t) + 1$: on a

$x'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} + 1 = \frac{1}{2} (e^t - \frac{1}{e^t} + 2) = \frac{1}{2e^t} ((e^t)^2 - 1 + 2e^t) = \frac{1}{2e^t} P(e^t)$ où $P(x) = x^2 + 2x - 1$ de discriminant $\Delta = 4 - 4 \times (-1) = 8$
 $\begin{matrix} >0 \\ - & - & 0 & + \end{matrix}$

Les racines de P sont $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} < 0$ et $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} > 0$

On a : $\frac{x}{P(x)}$ $\begin{matrix} x & -\infty & x_1 & 0 & x_2 \\ P(x) & + & 0 & - & | & - & 0 & + \end{matrix}$

puis : $x'(t) > 0 \Leftrightarrow e^t < x_1$ ou $e^t > x_2 \Leftrightarrow$ (pas de solution) ou $t > \ln(x_2)$. Ainsi : $\frac{t}{x'(t)}$ $\begin{matrix} t & -\infty & \ln(x_2) & +\infty \\ x'(t) & - & 0 & + \end{matrix}$