Projection orthononale et distance d'un point à une droite

- **Le projeté orthogonal** H **de** M **sur la droite** $\mathscr{D}$ **est le point d'intersection de** $\mathscr{D}$ **avec la normale** Δ **à** $\mathscr{D}$ **issue de** A**.**

  - Si on dispose d'une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ soit $\mathscr{D} = \mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}) + \mathrm{Vect}\left(\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}\right)$ alors

    on cherche le paramètre t pour que $\mathrm{H}(x_\mathrm{A} + t\alpha, y_\mathrm{A} + t\beta)$ (càd $\mathrm{H} \in \mathscr{D}$) vérifie $\overrightarrow{\mathrm{MH}}.\vec{u} = 0$ (càd $\mathrm{H} \in \Delta$)
  - Si on dispose d'une représentation cartésienne de $\mathscr{D}$ soit $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ alors

    $\Delta = \mathrm{M}(x_\mathrm{M}, y_\mathrm{M}) + \mathrm{Vect}\left(\vec{n}\begin{vmatrix}a\\ b\end{vmatrix}\right)$ où $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{D}$ et on cherche le paramètre t pour que les coordonnées de $\mathrm{H}(x_\mathrm{M} + ta, y_\mathrm{M} + ta)$ (càd $\mathrm{H} \in \Delta$) vérifie l'équation de $\mathscr{D}$.
- **On sait que la distance de** M **à la droite** $\mathscr{D}$ **vaut** $d(\mathrm{M}, \mathscr{D}) = \mathrm{HM}$

Intersection d'une droite et d'un cercle

Lorsqu'on étudie l'intersection d'une droite $\mathscr{D}$ avec un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R.
On compare le rayon R avec la distance de Ω à $\mathscr{D}$ qui vaut $d(\Omega, \mathscr{D}) = \Omega\mathrm{H}$ où H est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{D}$.
Il y a alors trois alternatives :

- Si $d(\Omega, \mathscr{D}) > \mathrm{R}$ alors $\mathscr{D}$ ne rencontre pas $\mathscr{C}$ soit $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \emptyset$.
- Si $d(\Omega, \mathscr{D}) = \mathrm{R}$ alors $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$ en H et $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \{\mathrm{H}\}$.
- Si $d(\Omega, \mathscr{D}) < \mathrm{R}$ alors $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B et $\mathscr{D} \cap \mathscr{C} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ (H est le milieu de [AB] et (HM) $\perp$ (AB) autrement dit (HM) est la médiatrice de [AB])

Intersection cercle/cercle

Le problème de l'intersection de deux cercles $\mathscr{C}_1 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = \mathrm{R}_1^2$ et $\mathscr{C}_2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = \mathrm{R}_2^2$ se ramène facilement à un problème d'intersection droite/cercle :

$$\mathrm{M}(x,y) \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = \mathrm{R}_1^2 \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = \mathrm{R}_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + (a_1^2 + b_1^2 - \mathrm{R}_1^2) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + (a_2^2 + b_2^2 - \mathrm{R}_2^2) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 :$$

$$\mathrm{M}(x,y) \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + (a_1^2 + b_1^2 - \mathrm{R}_1^2) = 0 \text{ (équation du cercle } \mathscr{C}_1) \\ 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + \gamma = 0 \text{ (équation d'une droite } \mathscr{D}) \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{M}(x,y) \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{D}$$

où $\gamma = a_2^2 + b_2^2 - \mathrm{R}_2^2 - (a_1^2 + b_1^2 - \mathrm{R}_1^2)$

Tangentes à un cercle en un point extérieur au cercle

Il y a deux tangentes au cercle de centre Ω et de rayon R qui sont issues d'un point I situé à l'extérieur.
On cherche ces tangentes en recherchant leurs équations sous forme réduite.
Une équation cartésienne de droite est de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$ mais la forme « réduite » (càd celle qui permet une interprétation géométrique) est de la forme :

$x = k$ où k réel fixé (droite verticale quand $b = 0$) ou $y = mx + p$ (quand $b \neq 0$)
m est la pente et p l'ordonnée à l'origine

Le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$ est directeur de la droite $\mathscr{T} : y = mx + p$ aussi $\vec{n} = \begin{pmatrix}-m\\ 1\end{pmatrix}$ dirige les normales à $\mathscr{T}$
Comme les tangentes sont issues de I, cela permet de déterminer k ou de lier les inconnues m et p.
La recherche de ces tangentes est ramenée à la détermination d'un seul paramètre obtenu à l'aide de l'équation

$$d(\mathrm{I}, \mathscr{T}) = \mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{IH} = \mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{IH}^2 = \mathrm{R}^2 \text{ où H est le projeté orthogonal de I sur } \mathscr{T}$$

Détermination d'une enveloppe

Si on veut déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathrm{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$,

- on commence par rechercher une description géométrique des droites :

  $$\mathrm{D}_t = \mathrm{A}(t) + \mathrm{Vect}\big(\vec{u}(t)\big) \text{ où A}(t) \text{ est un point de } \mathrm{D}_t \text{ et } \vec{u}(t) \text{ est un vecteur directeur}$$
- L'enveloppe $\mathscr{E}$ est alors une courbe paramétrée régulière décrite par le point $\mathrm{M}(t)$ telle que

  D_t est la tangente en $\mathrm{M}(t)$ à $\mathscr{E}$

  aussi i) $\mathrm{M}(t) \in \mathrm{D}_t \Leftrightarrow \exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{OM}(t)} = \overrightarrow{\mathrm{OA}(t)} + \lambda(t)\vec{u}(t)$ et ii) $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}$ et $\vec{u}(t)$ sont colinéaires

  soit $\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right) = 0$