PT : Démonstrations sur projecteur/symétrie du chapitre 0

Définition et proposition : Projecteur vectoriel sur F parallèlement à G

Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, on sait que : $\forall x \in \mathrm{E}, \exists!(x_\mathrm{F}, x_\mathrm{G}) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G},\ x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$

- On définit le projecteur p_F sur F parallèlement à G par : $\forall x \in \mathrm{E},\ p_\mathrm{F}(x) = x_\mathrm{F}$

  p_F est alors un endomorphisme de E avec $\mathrm{Im}\ p_\mathrm{F} = \boxed{\mathrm{F}}$ et $\mathrm{Ker}\ p_\mathrm{F} = \boxed{\mathrm{G}}$
- L'ensemble des vecteurs invariants par p_F est $\mathrm{Ker}\ (p_\mathrm{F} - id) = \boxed{\mathrm{F}}$
- Si p_G est le projecteur sur G parallèlement à F alors : $p_\mathrm{F} + p_\mathrm{G} = id_\mathrm{E}$ et $p_\mathrm{F} \circ p_\mathrm{G} = p_\mathrm{G} \circ p_\mathrm{F} = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$

- <u>p_F est alors un endomorphisme de E</u> Soient $(x, x') \in \mathrm{E}^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\begin{cases} x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G} \\ x' = x'_\mathrm{F} + x'_\mathrm{G} \end{cases}$ dans $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$

  Alors, par unicité de la décomposition dans $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$: $\alpha x + x' = \underbrace{(\alpha x_\mathrm{F} + x'_\mathrm{F})}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{(\alpha x_\mathrm{G} + x'_\mathrm{G})}_{\in \mathrm{G}}$ dans $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$

  Aussi, par définition de p_F : $p_\mathrm{F}(x) = x_\mathrm{F},\ p_\mathrm{F}(x') = x'_\mathrm{F}$ et $p_\mathrm{F}(\alpha x + x') = \alpha x_\mathrm{F} + x'_\mathrm{F} = \alpha p_\mathrm{F}(x) + p_\mathrm{F}(x')$
- <u>$\mathrm{Im}\ p_\mathrm{F} = \mathrm{F} = \mathrm{Ker}\ (p_\mathrm{F} - id)$ et</u>

  Par définition de p_F, on sait que : $\mathrm{Im}\ p_\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$ puisque : $p_\mathrm{F}(x) = x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ lorsque $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G} \in \mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$

  Réciproquement : si $x \in \mathrm{F}$ alors $x = x + 0_\mathrm{E}$ dans $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ donc $p_\mathrm{F}(x) = x \Rightarrow x \in \mathrm{Im}\ p_\mathrm{F}$. Ainsi : $\mathrm{F} \subset \mathrm{Im}\ p_\mathrm{F}$

  De plus, on a : $\forall x \in \mathrm{F},\ p(x) = x \Rightarrow (p - id_\mathrm{E})(x) = 0_\mathrm{E} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\ (p - id_\mathrm{E})$ d'où $\mathrm{F} \subset \mathrm{Ker}\ (p - id_\mathrm{E})$

  Et, si $x \in \mathrm{Ker}\ (p - id_\mathrm{E})$ alors $p(x) = x \Rightarrow x \in \mathrm{Im}\ p = \mathrm{F}$ d'où $\mathrm{Ker}\ (p - id_\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$
- <u>$\mathrm{Ker}\ p_\mathrm{F} = \mathrm{G}$</u> Si $x \in \mathrm{G}$ alors $x = 0_\mathrm{E} + x \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E} \Rightarrow p_\mathrm{F}(x) = 0_\mathrm{E} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\ p_\mathrm{F}$ aussi $\mathrm{G} \subset \mathrm{Ker}\ p_\mathrm{F}$

  Si $x \in \mathrm{Ker}\ (p_\mathrm{F})$ alors $p_\mathrm{F}(x) = 0_\mathrm{E}$ et donc : $x = 0_\mathrm{E} + x_\mathrm{G} = x_\mathrm{G} \in \mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \Rightarrow x \in \mathrm{G}$. Ainsi : $\mathrm{Ker}\ p_\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$
- <u>$p_\mathrm{F} + p_\mathrm{G} = id$ et $p_\mathrm{F} \circ p_\mathrm{G} = p_\mathrm{G} \circ p_\mathrm{F} = 0$</u> Pour tout x dans E, si $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G} \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$

  Alors : $p_\mathrm{G}(x) = x_\mathrm{G}$ et $p_\mathrm{F}(x) = x_\mathrm{F}$ et $id_\mathrm{E}(x) = x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G} = p_\mathrm{F}(x) + p_\mathrm{G}(x) = (p_\mathrm{F} + p_\mathrm{G})(x)$ d'où $p_\mathrm{F} + p_\mathrm{G} = id_\mathrm{E}$

  Et : $p_\mathrm{F} \circ p_\mathrm{G}(x) = p_\mathrm{F}(x_\mathrm{G}) = 0_\mathrm{E}$ car $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G} = \mathrm{Ker}\ p_\mathrm{F}$ et idem en inversant les rôles

Théorème : Caractérisation des projecteurs

Soit $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ alors p est un projecteur $\Leftrightarrow p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $p \circ p = p$

On a alors $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\ p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ p$

<u>$\Rightarrow$</u> : on suppose que $p = p_\mathrm{F}$ est le projecteur sur F parallèlement à G avec $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. On a déjà montré $p = p_\mathrm{F} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$
On a aussi $\mathrm{Im}\ p = \mathrm{Im}\ p_\mathrm{F} = \mathrm{F}$ donc : $\forall x \in \mathrm{E},\ p(x) = p(x) + 0_\mathrm{E} \in \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E} \Rightarrow p \circ p(x) = p(x)$ soit $p \circ p = p$
<u>$\Rightarrow$</u> : On suppose que $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec $p \circ p = p$

- On vérifie d'abord que $\mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p = \mathrm{E} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Ker}\ p = \{0_\mathrm{E}\}\ (1) \\ \mathrm{Im}\ p + \mathrm{Ker}\ p = \mathrm{E};\ (2) \end{cases}$

  - soit $x \in \mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Ker}\ p$, $\exists a \in \mathrm{E},\ x = p(a)$ et $p(x) = 0_\mathrm{E}$ aussi $0_\mathrm{E} = p(x) = p \circ p(a) = p(a) = x \Rightarrow x = 0_\mathrm{E}$ d'où (1)

  - $\mathrm{Im}\ p$ et $\mathrm{Ker}\ p$ sont des sev de E donc on a déjà $\mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p \subset \mathrm{E}$. Prouvons l'autre inclusion par analyse/synthèse :

  <u>Analyse</u> : Si $x \in \mathrm{E}$ s'écrit $x = x_\mathrm{N} + x_\mathrm{I}\ (i)$ où $x_\mathrm{N} \in \mathrm{Ker}\ p$ et $x_\mathrm{I} \in \mathrm{Im}\ p = \mathrm{Ker}\ (p - id)$ alors $p(x) = 0_\mathrm{E} + x_\mathrm{I}\ (ii)$

  Aussi $x_\mathrm{I} = p(x)$ et $x_\mathrm{N} = x - x_\mathrm{I} = x - p(x)$

  <u>Synthèse</u> : Pour $x \in \mathrm{E}$ quelconque, on écrit : $x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$

  alors $x_\mathrm{I} = p(x) \in \mathrm{Im}\ p$ et $x_\mathrm{N} = x - p(x) \in \mathrm{Ker}\ p$ puisque : $p(x_\mathrm{N}) = p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p \circ p(x)$

  vu que p est linéaire et, comme $p \circ p = p$, on obtient : $p(x_\mathrm{N}) = p(x) - p(x) = 0_\mathrm{E}$

  Ainsi : $x = x_\mathrm{I} + x_\mathrm{N} \in \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p$ et on a bien justifié : $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Ker}\ p$
- On justifie ensuite que $p = p_\mathrm{F}$ où $\mathrm{F} = \mathrm{Im}\ p$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}\ p$.

  En effet, pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a vu que : $x = p(x) + \big(x - p(x)\big) \in \mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ aussi on a bien $p_\mathrm{F}(x) = p(x)$

Définition et proposition : Symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G

Si $E = F \oplus G$, on sait que : $\forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$

- On définit la symétrie s_F par rapport à F parallèlement à G par : $\forall x \in E,\ s_F(x) = x_F - x_G$
- Si p_F est le projecteur sur F parallèlement à G alors : $s_F = 2p_F - id_E$

s_F est alors un automorphisme de E avec $s_F \circ s_F = id_E$ (autrement dit $s_F^{-1} = s_F$)

- L'ensemble des vecteurs invariants est Ker $(s_F - id_E) = \boxed{F}$ et on a aussi Ker $(s_F + id_E) = \boxed{G}$

- Soit $x = x_F + x_G \in E = F \oplus G$ alors
$(2p_F - id_E)(x) = 2p_F(x) - x = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s_F(x)$ aussi $\boxed{s_F = 2p_F - id_E \in \mathscr{L}(E)}$
- Ainsi, $s_F \in \mathscr{L}(E)$ puisque c'est une combinaison linéaire d'endomorphisme de E et :
$\forall x = x_F + x_F \in \mathscr{E}$ alors $s_F(x) = x_F - x_G \in E = F \oplus G$ donc : $s_F \circ s_F(x) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x = id_E(x)$
Aussi $\boxed{s_F \circ s_F = id_E}$ donc s_F est un automorphisme de E avec $s_F^{-1} = s_F$
- $\underline{F = \text{Ker } (s_F - id)}$: Si $x \in F$ alors $x = x + 0_E \in E = F \oplus G \Rightarrow s_F(x) = x - 0_E = x \Rightarrow x \in$ Ker $(s_F - id_F)$
Réciproquement, si $x \in$ Ker $(s_F - id_E)$, alors : $s_F(x) = x \Leftrightarrow x_F - x_G = x_F + x_G \Rightarrow 2x_G = 0_E \Rightarrow x_G = 0_E$ et donc $x = x_F \in F$
- $\underline{G = \text{Ker } (s_F + id)}$: Si $x \in G$ alors $x = 0_E + x \in E = F \oplus G \Rightarrow s_F(x) = 0_E - x \Rightarrow (s_F + id_E)(x) = 0_E \Rightarrow x \in$ Ker $(s_F + id_E)$
Réciproquement : $x \in$ Ker $(s_F + id_E) \Rightarrow s_F(x) + x = 0_E \Rightarrow x_F - x_G + x_F + x_G = 0_E \Rightarrow x_F = 0_E$ et donc $x = x_G \in G$

Théorème : Caractérisation des symétries

Soit $s : E \to E$ alors s est une symétrie $\Leftrightarrow s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = id_E$

On a $E = \text{Ker } (s - id_E) \oplus \text{Ker } (s + id_E)$ et s est la symétrie par rapport à Ker $(s - id_E)$ parallèlement à Ker $(s + id_E)$

$\underline{\Rightarrow}$: on suppose que $s = s_F$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G avec $E = F \oplus G$ et on a déjà montré précédemment que $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = id_E$
$\underline{\Rightarrow}$: On suppose que $s \in \mathscr{L}(E)$ avec $s \circ s = id_E$

- On vérifie d'abord que Ker $(s - id_E) \oplus$ Ker $(s + id_E) = E \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Ker } (s - id_E) \cap \text{Ker } (s + id_E) = \{0_E\}\ (i) \\ \text{Ker } (s - id_E) + \text{Ker } (s + id_E) = E\ (ii) \end{cases}$

- soit $x \in$ Ker $(s - id_E) \cap$ Ker $(s + id_E)$, alors $\begin{cases} s(x) = x \\ s(x) = -x \end{cases}$ aussi $2x = s(x) - s(x) = 0_E \Rightarrow x = 0_E$ et (i) prouvé

- Ker $(s - id_E)$ et Ker $(s + id_E)$ sont des sev de E donc on a déjà Ker $(s - id_E) +$ Ker $(s + id_E) \subset E$. On prouve l'autre inclusion par analyse/synthèse.

<u>Analyse</u> : Si $x \in E$, on suppose que $x = x_1 + x_2\ (i)$ où $\begin{cases} x_1 \in \text{Ker } (s - id) \Leftrightarrow s(x_1) = x_1 \\ x_2 \in \text{Ker } (s + id) \Leftrightarrow s(x_2) = -x_2 \end{cases}$

alors $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2\ (ii)$ de sorte que $\begin{cases} 2x_1 = x + s(x)\ (i) + (ii) \\ 2x_2 = x - s(x)\ (i) - (ii) \end{cases}$

<u>Synthèse</u> : Pour $x \in E$ quelconque : $x = \dfrac{x + s(x)}{2} + \dfrac{x - s(x)}{2}$

et on vérifie que $x_1 = \dfrac{x + s(x)}{2} \in$ Ker $(s - id_E)$ et $x_2 = \dfrac{x - s(x)}{2} \in$ Ker $(s + id_E)$ puisque :

$s(x_1) = s\left(\dfrac{x + s(x)}{2}\right) = \dfrac{s(x) + s \circ s(x)}{2} = \dfrac{s(x) + x}{2} = x_1$ puisque $s \circ s = id_E$ et par linéarité de s donc $x_F \in$ Ker $(s - id_E)$

$s(x_2) = s\left(\dfrac{x - s(x)}{2}\right) = \dfrac{s(x) - s \circ s(x)}{2} = \dfrac{s(x) - x}{2} = -x_2 \Rightarrow x_G \in$ Ker $(s + id_E)$

Ainsi : $x = x_1 + x_2 \in$ Ker $(s - id_E) +$ Ker $(s + id_E)$ conduisant à l'inclusion $E \subset$ Ker $(s - id_E) +$ Ker $(s + id_E)$

- On justifie enfin que $s = s_F$ où $F =$ Ker $(s - id_E)$ et $G =$ Ker $(s + id_E)$. En effet, pour tout $x \in E$, on a vu que :
$x = \dfrac{x + s(x)}{2} + \dfrac{x - s(x)}{2} \in E = F \oplus G$ aussi $s_F(x) = \dfrac{x + s(x)}{2} - \dfrac{x - s(x)}{2} = s(x)$