On repère un raisonnement dit de comparaison série/intégrale lorsqu'il s'agit d'obtenir des inégalités du type

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{ou} \qquad \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \geqslant f(k) \geqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$$

Par sommation des inégalités, on pourra obtenir un encadrement des sommes partielles de $\sum_{k\geqslant 1} f(k)$ à l'aide d'intégrales :

$$\int_{0}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_{1}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{ou} \qquad \int_{0}^{n} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_{1}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$$

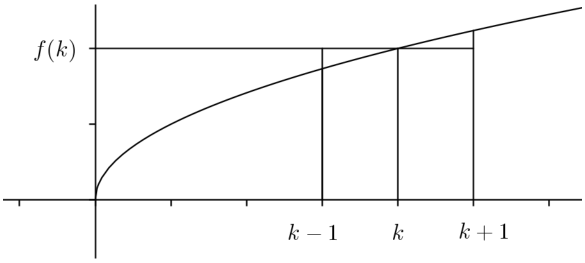
Il s'agit de comprendre le raisonnement car les preuves doivent être refaite au cas par cas à chaque fois.

Le raisonnement se déroule en plusieurs étapes :

1. On identifie la fonction f à partir du sujet et, au moins au voisinage de $+\infty$ (càd sur un intervalle du type $[A, +\infty[$)

f doit être monotone (croissante ou décroissante) et positive

2. À l'aide d'un dessin, on conjecture les inégalités à obtenir



L'aire du rectangle de base $[k-1, k]$ et de hauteur $f(k)$ est plus grande que l'aire sous la courbe d'équation $y = f(x)$ sur $[k-1, k]$ donc : $\quad f(k) \times 1 \geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$

L'aire du rectangle de base $[k, k+1]$ et de hauteur $f(k)$ est plus petite que l'aire sous la courbe d'équation $y = f(x)$ sur $[k, k+1]$ donc : $\quad f(k) \times 1 \leqslant \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$

Ainsi, dans le cas d'une fonction croissante et positive sur $[A, +\infty[$, on a :

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad k-1 \geqslant A \Leftrightarrow k \geqslant A+1 \Leftrightarrow k \geqslant \lfloor A+1 \rfloor + 1 = n_A$$

k est un entier, $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

3. On prouve les inégalités à l'aide des propriétés de f et de la propriété de croissance de l'intégrale

Pour k entier avec $k-1 \geqslant A$ alors, f est croissante sur $[k-1, k]$ aussi : $k-1 \leqslant t \leqslant k \Rightarrow f(k-1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$.

Si f est décroissante, on inverse les inégalités...

On intègre le seconde inégalité sur $[k-1, k]$ en utilisant la propriété de croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t = f(k)\int_{k-1}^{k} \mathrm{d}t = f(k) \times 1 = f(k) \quad \text{soit} \quad \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

$f(k)$ ne dépend pas de t donc c'est une constante qui sort de l'intégrale

On mène le même raisonnement sur $[k, k+1]$ pour obtenir l'inégalité : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$

4. Il reste à sommer les inégalités sur k à l'aide de la relation de Chasles pour faire apparaître la somme partielle

Si on a $\begin{cases} a_1 \leqslant b_1 \\ a_2 \leqslant b_2 \\ \vdots \\ a_n \leqslant b_n \end{cases}$ alors, en sommant les inégalités, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$

Ici, on peut sommer les inégalités pour $k \in [\![n_A, n]\!]$ càd pour les k où elles sont vraies (cf contrainte lié au voisinage $[A, +\infty[$)

$$\sum_{k=n_A}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n_A-1}^{n_A} f(t)\mathrm{d}t + \int_{n_A}^{n_A+1} f(t)\mathrm{d}t + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n_A-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{par la relation de Chasles.}$$

De même : $\displaystyle\sum_{k=n_A}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{n_A}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ d'où $\displaystyle\int_{n_A-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_A}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_A}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$

Pour obtenir vraiment la somme partielle au milieu, on doit rajouter les premiers termes dans chacun des membres