PT : Méthodologie pour l'étude d'une équation différentielle

***On commence par identifier l'équation différentielle* (E) *et la variable et l'intervalle* I *où évolue la variable* :**

- l'équation doit être linéaire
- on précise son ordre (indice de la dérivée le plus grand)
- est-elle à coefficients constants ? (càd les coefficients devant les dérivées sont-ils constants ? Cela ne concerne pas le second membre)
- est-elle résolue sur le domaine où on résout l'équation ? (càd le coefficient devant la dérivée la plus grande s'annule-t-il sur le domaine I ?)

$\boxed{\mathrm{EDL}_1}$

Résolue en y'

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$
L'ensemble des solutions est
$\boxed{\mathscr{S} = y_p + \mathrm{Vect}(h)}$
où h est une solution
homogène non nulle
et y_p solution particulière
Bien simplifier $h(t)$!
On peut utiliser le signe de la constante pour les valeurs absolue

Non résolue en y'

Résolution sur $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$
où (E) est résolue sur J
puis recollement
par analyse/synthèse
avec y continue
et dérivable sur I

• Recherche des solutions homogènes :
$h(x) = e^{-\mathrm{A}(x)}$ où $\mathrm{A}' = a$

• Recherche d'une solution particulière :
Solutions analogues au 2n membre
ou **méthode de variation de la constante**
$y_p(t) = \mathrm{C}(t)h(t)$
où C dérivable sur I

On ne recalcule pas $h_1'(t)$
qui disparaît dans le calcul

$\boxed{\mathrm{EDL}_2}$

Résolue en y''

L'ensemble des solutions est
$\boxed{\mathscr{S} = y_p + \mathrm{Vect}(h_1, h_2)}$
où h_1 et h_2 solutions
homogènes non colinéaires
et y_p solution particulière

Non résolue en y''

Résolution sur $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$
où (E) est résolue sur J
puis recollement
par analyse/synthèse
avec y continue
et 2 fois dérivable sur I

Si les coefficients sont constants

(H) : $ay'' + by' + cy = 0$
équation caractéristique :
$ar^2 + br + c = 0$
expression des solutions
selon le signe de Δ
(à connaître)

On connaît une règle pour les 2nd membres du type
$\mathrm{K}e^{mx}$ avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$
selon que m est racine
simple, double ou pas racine
de l'équation caractéristique
(éventuellement $\mathrm{K}\cos(\omega x)$ ou $\mathrm{K}\sin(\omega x)$
en passant en complexe $\Re e(e^{i\omega x})$,etc...)

Si les coefficients ne sont pas constants

On se laisse guider par le sujet

- avec une indication pour trouver
au moins une solution homogène h
puis on utilise la **méthode de Lagrange dite d'abaissement de l'ordre**
$y(t) = z(t)h_1(t)$
où z est 2 fois dérivable
On ne recalcule pas $h''(t)$
qui disparaît dans le calcul
$\mathrm{Y} = z'$ est solution d'une EDL_1
et on trouve h_2 et y_p directement

- avec **un changement de variables**
pour revenir à une équation
à coefficients constants

Dans tous les cas, **détailler l'expression de la solution générale à l'aide de constantes d'intégration** et **repérer la structure algébrique de l'ensemble des solutions**.

Attention ! Dans le cas d'équations non résolues, toutes les configurations sont possibles : il peut ne pas y avoir de solutions, y en avoir une unique solution (sans avoir besoin de conditions initiales...) ou y en avoir une infinité avec plusieurs constantes d'intégrations (en nombre supérieur à l'ordre !)