PT : Relation $\sim$ et o (rappels PTSI)

Étant donnée deux fonctions f et g ne s'annulant pas au voisinage de a sauf peut être en a,

- « $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a » lorsque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$

  ce qu'on peut écrire $f(x) = g(x) \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et qu'on note $f(x) = o_a(g(x))$ (ou $f = o_a(g)$)

  Exemples : a) $f(x) = o_a(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

  b) $x^2 = o(x)$ en 0 mais $x = o(x^2)$ en $+\infty$

  c) En 0 : $x^2 \ln x = o(x)$ mais aussi $x^2 \ln x = o(\ln x)$ ou $x^2 \ln x = o(x \ln x)$

  Le "o" permet de regrouper tous les termes qui sont à négliger (et donc qu'on peut oublier) ce qui permet de "nettoyer" une expression en ne gardant que les termes importants localement.

  Exemples : En $+\infty$, estimons $f(x) = x^{100} + e^{10^{-10}x} + \cos x$

- « $f(x)$ est équivalente à $g(x)$ au voisinage de a » lorsque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$

  ce qu'on peut écrire $f(x) = g(x) \times \psi(x)$ avec $\psi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et qu'on note $f(x) \sim_a g(x)$ (ou $f \sim_a g$)

  L'équivalent est un outil particulièrement efficace pour la recherche de limite : $\begin{cases} f(x) \sim_a g(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{cases} \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

  D'ailleurs, lorsque justement $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \neq 0$, alors $f(x) \sim_a \ell$ (c'est équivalent le plus simple qu'on puisse trouver !)

  Attention ! Écrire $f(x) \sim_a 0$ n'a donc aucun SENS car on ne peut pas définir cette proposition...

  On dispose aussi de l'équivalence : $f(x) \sim_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o_a\big(g(x)\big)$

  Preuve : $f(x) = g(x) + o_a\big(g(x)\big) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + o_a(1) \xrightarrow[x\to a]{} 1$

  Les DL donnent donc un outil privilégié pour déterminer un équivalent pour une expression : le premier terme non nul du développement limité donne un équivalent.

  Exemples : En 0 : $f(x) = xe^x - \ln(1+x) = x\big(1 + x + o(x)\big) - \big(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\big) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim_0 \frac{3}{2}x^2$

  Les opérations compatibles avec les équivalents sont

  - les produits et les quotients : $\begin{cases} f_1(x) \sim_a g_1(x) \\ f_2(x) \sim_a g_2(x) \end{cases} \Rightarrow f_1(x)f_2(x) \sim_a g_1(x)g_2(x)$ et $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim_a \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$

    Preuve : $f_1(x) = \Psi_1(x)g_1(x)$ et $f_2(x) = \Psi_2(x)g_2(x)$ où $\Psi_i(x) \to 1$ donc

    $$f_1(x)f_2(x) = \underbrace{\Psi_1(x)\Psi_2(x)}_{\to 1\times 1 = 1} g_1(x)g_2(x) \quad \text{et} \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \underbrace{\frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)}}_{\to \frac{1}{1}=1} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

  - le passage à une puissance $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(x) \sim_a g(x) > 0$ alors $f(x)^\alpha \sim_a g(x)^\alpha$

    Preuve : $\dfrac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} = \dfrac{e^{\alpha \ln f(x)}}{e^{\alpha \ln g(x)}} = e^{\alpha\left(\ln f(x) - \ln g(x)\right)} = e^{\alpha \ln \frac{f(x)}{g(x)}} \to e^{\alpha \times 0} = 1$ car $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$

  - le changement de variables : $f(x) \sim_a g(x)$ et $x = \varphi(t) \xrightarrow[t\to b]{} a$ alors $f\big(\varphi(t)\big) \sim_b g\big(\varphi(t)\big)$

    Attention !

    - L'addition n'est pas compatible à cause de termes de même poids pouvant conduire à des non SENS du style : $\begin{cases} \ln(1+x) \sim_0 x \\ \ln(1-x) \sim_0 -x \end{cases}$ ne permettant pas d'obtenir un équivalent de $\ln(1+x) + \ln(1-x)$...

    - La composition (par l'extérieur) est fausse en général :

    Contre-ex : $x + 1 \sim_{+\infty} x$ mais $e^{x+1} \not\sim_{+\infty} e^x$ puisque $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$ qui ne tend pas vers 1

    Contre-ex : $1 + x^2 \sim_0 1 + x$ (aussi $\sim_0 1$ d'ailleurs...) mais $\ln(1+x^2) \not\sim_0 \ln(1+x)$ puisque $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)} \sim_0 \dfrac{x^2}{x} = x \to 0 \neq 1$

PT : Exercices d'application

1. Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$
2. Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $h(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{|1-x|}$
3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ puis en 0 de $h(x) = x^2 + x + \ln(1+\sqrt{x})$