$$\boxed{\text{Étude de F où } F(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt}$$

1. É tudier la définition de F lorsque x est un réel positif.

On pose $\quad f(x,t) = \dfrac{1-t^x}{1-t} = \dfrac{1-e^{x\ln t}}{1-t} \quad$ avec $x \geqslant 0$ qui est le paramètre et $t \in]0,1[$ qui est la variable intégrée.
On étudie la convergence de l'intégrale généralisée $F(x)$ en fonction des valeurs possibles du paramètre x.

• Argument de continuité :
$\big[f(x,.) : t \mapsto f(x,t)\big]$ est C^0 sur $]0,1[$ par les théorèmes usuels ($t>0$ et $1-t \neq 0$)
Il y a donc deux singularités à étudier séparément en $t=0$ et en $t=1$:
• Étude de l'intégrabilité en $t=0$ (x fixé) :
si $x \neq 0$ alors $f(x,t) \sim_{t\to 0} 1-e^{x\ln t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1 \quad$ car $x\ln t \to -\infty \quad$ Attention à ne pas écrire ~ 0 lorsque $x=0$!
Si $x=0$ alors $f(0,.)$ est la fonction nulle donc intégrable en 0

• Étude de l'intégrabilité en $t=1$ (x fixé) : on pose $t = 1-h$ où $h>0$ et $f(x,1-h) = \dfrac{1-e^{x\ln(1-h)}}{h}$

On repère l'équivalent $\begin{cases} 1-e^u \sim_0 u \\ u = x\ln(1-h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \end{cases}$

si $x \neq 0$ alors $f(x,1-h) \sim_{h\to 0} \dfrac{-x\ln(1-h)}{h} \sim_{h\to 0} -x \times \dfrac{-h}{h} \sim_0 x$ Attention à ne pas écrire ~ 0 lorsque $x=0$!
Si $x=0$ alors $f(0,.)$ est la fonction nulle donc intégrable en 1
• En définitive, l'intégrale $F(x)$ est convergente si $x>0$ et aussi si $x=0$. Conclusion, $\boxed{\text{F est définie sur } [0,+\infty[}$

2. Justifier la continuité de F sur $[0,+\infty[$ (on pourra dominer sur $[0,A]$ avec $A>0$)

On applique le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre à $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{1-t^x}{1-t}}_{=f(x,t)}\,dt$ où $\begin{cases} x \in [0,+\infty[\\ t \in]0,1[\end{cases}$

• énoncé du théorème : Pour obtenir que F est continue sur $[0,+\infty[$, il s'agit de vérifier :
i) $\forall x \geqslant 0$, $[t \mapsto f(x,t)]$ est C^0 sur $]0,1[$
ii) $\forall t \in]0,1[$, $[x \mapsto f(x,t)]$ est C^0 sur $[0,+\infty[$
iii) *Domination sur* $[0,A]$ *pour* $A>0$:
$\exists \varphi_A$ continue, positive et intégrable sur $]0,1[$ avec $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,1[$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi_A(t)$

• Vérification des hypothèses : $\quad f(x,t) = \dfrac{1-e^{x\ln t}}{1-t}$

La fonction de deux variables f est C^0 sur $\mathscr{U} = \mathbb{R}\times\big(]0,1[\cup]1,+\infty[\big)$ par les théorèmes usuels (où $t>0$ et $1-t \neq 0$, pas de contrainte sur x) et : $[0,+\infty[\times]0,1[\subset \mathscr{U}$ aussi, en passant aux applications partielles, on obtient les hypothèses i) et ii)

Pour la domination, on part de la contrainte : Pour $(x,t) \in [0,A]\times]0,1[$
$0 \leqslant x \leqslant A \Rightarrow_{\ln t<0} A\ln t \leqslant x\ln t \leqslant 0 \Rightarrow e^{A\ln t} \leqslant e^{x\ln t} \leqslant 1 \Rightarrow 1-e^{A\ln t} \geqslant 1-e^{x\ln t} \geqslant 0 \Rightarrow_{1-t>0} 0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(A,t)$
On pose $\quad \varphi_A(t) = f(A,t) \quad$ alors φ_A est bien continue (application partielle de f), positive et intégrable sur $]0,1[$ puisque $\displaystyle\int_0^1 \varphi_A(t)\,dt = F(A)$ qui CV d'après l'étude de définition de F.
• Conclusion : i), ii) et iii) étant vérifiée, F est continue sur $[0,A]$ pour tout $A>0$
Mais $\displaystyle\bigcup_{A>0}[0,A] = [0,+\infty[$ et la continuité est une propriété locale donc $\boxed{\text{F est } C^0 \text{ sur } [0,+\infty[}$

3. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} F(x)$ et F est continue en 0 donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = \int_0^1 0\,dt = 0$ Ainsi : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt = 0}$

$$\boxed{\text{Étude de H où } H(a)=\int_0^1 \frac{\ln x}{x+a}\mathrm{d}x}$$

1. É tudier la définition de H lorsque a est un réel positif.

On pose $f(a,x)=\dfrac{\ln x}{x+a}$ où $a\geqslant 0$ est le paramètre et $x\in]0,1]$ est la variable intégrée.

On étudie la convergence de l'intégrale généralisée $H(a)$ en fonction des valeurs possibles du paramètre a.

• Argument de continuité :
$\left[f(a,.):x\mapsto f(a,x)\right]$ est C^0 sur $]0,1]$ par les théorèmes usuels (où $x>0$ et $x+a\geqslant x>0$ donc $\neq 0$)
Il y a une singularité à étudier en $x=0$
• On étudie l'intégrabilité en $x=0$ (a fixé) : L'équivalent de $f(a,x)$ si $x\to 0$ induit de séparer les cas $a>0$ et $a=0$

si $a>0$, $f(a,x)\sim_{x\to 0}\dfrac{1}{a}\ln(x)$ or ln est intégrable en 0 donc CV donc $H(a)$ converge

si $a=0$, on reconnaît une primitive usuelle $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(0,x)\mathrm{d}x=\int_\varepsilon^1\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}=\left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_\varepsilon^1=-\frac{(\ln\varepsilon)^2}{2}\to-\infty$

donc, par définition, l'intégrale $H(0)$ DV
• Conclusion, $H(a)$ converge lorsque $a>0$ et diverge si $a=0$ donc $\boxed{\text{H est définie sur }]0,+\infty[}$

2. Étudier la continuité de H sur $]0,+\infty[$ (on pourra d'abord dominer sur $[\varepsilon,A]$ avec $0<\varepsilon<A$)

On applique le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre à $H(a)=\displaystyle\int_0^1\underbrace{\frac{\ln x}{x+a}}_{=f(a,x)}\mathrm{d}x$ où $\begin{cases}a\in]0,+\infty[\\ x\in]0,1]\end{cases}$

• énoncé du théorème : Pour obtenir que H est continue sur $]0,+\infty[$, il s'agit de vérifier que

i) $\forall a>0$, $[x\mapsto f(a,x)]$ est C^0 sur $]0,1[$
ii) $\forall t\in]0,1[$, $[a\mapsto f(a,x)]$ est C^0 sur $]0,+\infty[$
iii) *Domination sur* $[\varepsilon,A]$ *pour* $0<\varepsilon<A$:
$\exists\varphi_{\varepsilon,A}$ continue, positive et intégrable sur $]0,1[$ avec $\forall(a,x)\in[\varepsilon,A]\times]0,1[$, $|f(a,x)|\leqslant\varphi_{\varepsilon,A}(x)$

• vérification des hypothèses :

La fonction de deux variables f est continue sur $\mathscr{U}=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ (où $x>0$ et $a+x>0$ donc $\neq 0$)
Or : $]0,+\infty[\times]0,1]\subset\mathscr{U}$ aussi, en passant aux applications partielles, on a i) et ii) qui sont vérifiées.

Pour la domination, on part de la contrainte Pour $(a,x)\in[\varepsilon,A]\times]0,1[$, $\left|f(x,a)\right|=\dfrac{|\ln x|}{x+a}$

$0<\varepsilon\leqslant a\leqslant A\Rightarrow 0<\varepsilon+x\leqslant a+x\leqslant A+x\Rightarrow\dfrac{1}{A+x}\leqslant\dfrac{1}{a+x}\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon+x}\Rightarrow_{|\ln x|\geqslant 0}0\leqslant\dfrac{|\ln x|}{A+x}\leqslant\dfrac{|\ln x|}{a+x}\leqslant\dfrac{|\ln x|}{\varepsilon+x}$

On pose $\varphi_{\varepsilon,A}(x)=\dfrac{|\ln x|}{\varepsilon+x}$ alors $\varphi_{\varepsilon,A}$ est positive, continue sur $]0,1]$ (c'est $|f(\varepsilon,.)|$) et elle est intégrable puis-qu'on a justifié que $\displaystyle\int_0^1\frac{|\ln x|}{\varepsilon+x}\mathrm{d}x=-H(\varepsilon)$ converge dans l'étude de la définition de H

Comme $\dfrac{|\ln x|}{\varepsilon+x}\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}|\ln x|$, *on pouvait utiliser* $\varphi_{\varepsilon,A}(x)=\dfrac{1}{\varepsilon}|\ln x|$ *comme dominante*

• Conclusion : Comme i), ii) et iii) sont vérifiées, on sait que F est continue sur $[\varepsilon,A]$ avec $0<\varepsilon<A$

Mais $\displaystyle\bigcup_{0<\varepsilon<A}[\varepsilon,A]=]0,+\infty[$ et la continuité est une propriété locale donc $\boxed{\text{H est } C^0 \text{ sur }]0,+\infty[}$

3. Démontrer que H est de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$ pour $\varepsilon>0$ et calculer $H'(a)$ sans le symbole intégral.

On applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre à à $H(a)=\displaystyle\int_0^1\underbrace{\frac{\ln x}{x+a}}_{=f(a,x)}\mathrm{d}x$ où $\begin{cases}a\in]0,+\infty[\\ x\in]0,1]\end{cases}$

• énoncé du théorème : Pour obtenir sur H est de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$, il s'agit de vérifier

i) $\forall a \geqslant \varepsilon,\ [x \mapsto f(a,x)]$ est intégrable sur $]0,1[$
ii) $\forall x \in]0,1[,\ [a \mapsto f(a,x)]$ est de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$
iii) $\forall a \geqslant \varepsilon\ \left[x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right]$ est continue sur $]0,1[$
iv) *Domination* : il existe φ_ε continue, positive et intégrable sur $]0,1[$ avec $\forall a \geqslant \varepsilon, \forall x \in]0,1[, \left|\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| \leqslant \varphi_\varepsilon(x)$

• vérification des hypothèses :

L'hypothèse i) a été justifiée lorsqu'on a étudié la définition de H puisque $[\varepsilon,+\infty \subset]0,+\infty[$

La fonction de deux variables f est de classe C^1 sur $\mathscr{U} =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ (où $x>0$ et $a+x>0$ donc $\neq 0$)
Or : $[\varepsilon,+\infty[\times]0,1] \subset \mathscr{U}$ aussi f admet sur ce domaine des dérivées partielles selon a et selon x qui sont continues sur le domaine. On peut donc affirmer que :
- on retrouve l'argument de continuité de i)
- l'hypothèse ii) est prouvée
- l'hypothèse iii) est prouvée

Il reste à établir la domination sous la contrainte $a \in [\varepsilon,+\infty[$: $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \dfrac{-\ln(x)}{(a+x)^2} \geqslant 0$ si $(a,x) \in [\varepsilon,+\infty[\times]0,1]$
On part de la contrainte pour obtenir la domination :
$a \geqslant \varepsilon \Rightarrow a+x \geqslant \varepsilon + x \Rightarrow (a+x)^2 \geqslant (\varepsilon+x)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{(a+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{(\varepsilon+x)^2} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| = \dfrac{-\ln(x)}{(a+x)^2} \leqslant \dfrac{-\ln x}{(\varepsilon+x)^2} \leqslant -\dfrac{\ln(x)}{(\varepsilon)^2} = \varphi_\varepsilon(x)$
La fonction $\varphi_\varepsilon = -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\ln$ est bien positive, continue et intégrable sur $]0,1]$

• Conclusion : Comme les hypothèses i),ii), iii) et iv) sont vérifiées, la fonction H est de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$
et que $H'(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-\ln x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x$
En outre, vu que $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon>0}[\varepsilon,+\infty[=]0,+\infty[$ et que la classe C^1 est une propriété locale, on peut conclure que

H est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$

• Calcul de $H'(a)$ sans le symbole intégrale : $\forall a>0,\ H'(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$
On mène une IPP : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = -\dfrac{1}{(a+x)^2}\end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{a+x}\end{cases}$ où u, v C^1 sur $]0,1[$
Comme $[u(x)v(x)]_0^1 = \left[\dfrac{\ln x}{a+x}\right]_0^1$ DV, on fait l'IPP sur $[\varepsilon,1]$: $I_\varepsilon = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{-\ln(x)}{(a+x)^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln x}{a+x}\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(a+x)}$
On repère une décomposition possible en éléments simples sur l'intégrale :
$I_\varepsilon = -\dfrac{\ln\varepsilon}{a+\varepsilon} - \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_\varepsilon^1\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a+x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln\varepsilon}{a+\varepsilon} - \frac{1}{a}[\ln(x) - \ln(a+x)]_\varepsilon^1 = -\frac{\ln\varepsilon}{a+\varepsilon} + \frac{\ln(a+1)}{a} + \frac{\ln\varepsilon}{a} - \frac{\ln(a+\varepsilon)}{a}$
$I_\varepsilon = \dfrac{-\varepsilon\ln\varepsilon}{a(a+\varepsilon)} + \dfrac{\ln(1+a) - \ln(a+\varepsilon)}{a}$ aussi $H'(a) = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon = 0 + \frac{\ln(1+a)-\ln a}{a} \Leftrightarrow \boxed{H'(a) = \frac{\ln(1+a)-\ln a}{a}}$

4. Déterminer alors l'expression de $H(a) + H(\frac{1}{a})$ sans symbole intégral en faisant intervenir la constante $H(1)$.

La fonction $\Phi = [a \mapsto H(a) + H(\frac{1}{a})]$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ par somme et composition ($\dfrac{1}{a} > 0$ si $a>0$) et :
$\Phi'(a) = H'(a) - \frac{1}{a^2}H'(\frac{1}{a}) = \dfrac{\ln(1+a)-\ln a}{a} - \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{\ln(1+\frac{1}{a}) - \ln\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}}\right) = \dfrac{1}{a}(\ln(1+a) - \ln a - \ln(1+a) + \ln a - \ln a) = -\dfrac{\ln a}{a}$
On repère une primitive usuelle : $-\dfrac{\ln a}{a} = -u'(a)\times u(a) = \left(-\dfrac{u^2(a)}{2}\right)'$ avec $u(a) = \ln a$
Alors : $\forall a>0,\ \Phi'(a) = \left(-\dfrac{(\ln a)^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall a>0,\ \Phi(a) = H(a) + H(\frac{1}{a}) = -\dfrac{(\ln a)^2}{2} + K$

et on précise K en évaluant en $a=1$: $2H(1) = 0 + K$ soit : $\boxed{\forall a>0,\ H(a) + H(\frac{1}{a}) = -\frac{(\ln a)^2}{2} + 2H(1)}$

Étude de L_v où $L_v(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\ln t\,dt$ *(transformée de Laplace de* ln*)*

1. Étudier la définition de $L_v(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\ln t\,dt$ et $L_w(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}t\ln t\,dt$ lorsque x est un réel

On pose $f(x,t) = \ln(t)e^{-xt}$ et $g(x,t) = t\ln(t)e^{-xt}$ où $x \in \mathbb{R}$ est le paramètre et $t \in]0,+\infty[$ la variable intégrée

On étudie la convergence des intégrales généralisées $L_v(x)$ et $L_w(x)$ en fonction des valeurs possibles du paramètre x.

• Argument de continuité :

$\left[f(x,.) : t \mapsto f(x,t)\right]$ et $\left[g(x,.) : t \mapsto f(x,t)\right]$ sont C^0 sur $]0,+\infty[$ par les théorèmes usuels (où $t > 0$).
Il y a deux singularité à étudier en 0 et en $+\infty$ (à x fixé dans $\mathbb{R}$) en séparant les problèmes.

• Étude de l'intégrabilité en $t = 0$ (x fixé) :
$f(x,t) \sim_{t\to 0} \ln t$ or ln est intégrable en 0 donc $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable en $t = 0$
$g(x,t) \sim_{t\to 0} t\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ (par croissance comparée) donc $[t \mapsto g(x,t)]$ est prolongeable par continuité en $t = 0$

• Étude de l'intégrabilité en $t = 0$ (x fixé) : le comportement de e^{tx} dépend du signe de x

si $x \leqslant 0$: Pour $t \geqslant 1$, $f(x,t) \geqslant \ln t > 0$ et aussi $g(x,t) \geqslant t\ln t \geqslant \ln t > 0$ (car $t \geqslant 1$)
or $\int_1^{+\infty} (\ln t)\mathrm{d}t$ DV (car, par IPP : $\int_1^A (\ln t)\mathrm{d}t = [t\ln t]_1^A - \int_1^A \mathrm{d}t = A\ln A - A + 1 = A(\ln A - 1) + 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$)
donc, par minoration, les intégrales ne converge pas en $+\infty$ lorsque $x \leqslant 0$

si $x > 0$:
$t^2|f(x,t)| = t^2(\ln t)e^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée) donc $|f(x,t)| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ OU BIEN $|f(x,t)| = o_{+\infty}\left(e^{-\frac{x}{2}t}\right)$
$t^2|g(x,t)| = t^3(\ln t)e^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée) donc $|g(x,t)| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ OU BIEN $|g(x,t)| = o_{+\infty}\left(e^{-\frac{x}{2}t}\right)$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ CVA (Riemann $\alpha = 2 > 1$) OU BIEN $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}t}\mathrm{d}t$ CVA car $\frac{x}{2} > 0$
On obtient, par la règle du o que $f(x,.)$ et $g(x,.)$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$.

• Conclusion :

Si $x \leqslant 0$: $L_v(x) = \underbrace{\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t}_{\text{CV}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t}_{\text{DV}}$ diverge et $L_w(x) = \underbrace{\int_0^1 g(x,t)\mathrm{d}t}_{\text{CV}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t}_{\text{DV}}$ diverge

Si $x > 0$, les deux intégrales $L_v(x)$ et $L_w(x)$ convergent aussi :

$\boxed{L_v \text{ est définie sur }]0,+\infty[}$ et $\boxed{L_w \text{ est définie sur }]0,+\infty[}$

2. Vérifier que L_v est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ en dominant sur $[a,+\infty[$ où $a > 0$

On applique le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre à $L_v(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{tx}\ln t}_{=f(x,t)}\mathrm{d}t$ où $\begin{cases} x \in]0,+\infty[\\ t \in]0,+\infty[\end{cases}$

• énoncé du théorème : Pour obtenir sur L_v est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, il s'agit de vérifier

i) $\forall x > 0$, $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$
ii) $\forall t > 0$, $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$
iii) $\forall x > 0$, $\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur $]0,+\infty[$

iv) *Domination* : il existe φ_a continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec $\forall x \geqslant a, \forall t > 0, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_a(t)$

• vérification des hypothèses :
La fonction de deux variables f est de classe C^1 sur $\mathscr{U} = \mathbb{R}\times]0,\infty[$ (où $t > 0$),
Comme $]0,+\infty[\times]0,+\infty[\subset \mathscr{U}$, on sait que f admet des dérivées partielles sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ qui sont continues sur ce domaine. On a donc les hypothèses ii) et iii) vérifiées et aussi l'argument de continuité pour i).
i) est vérifiée puisque l'intégrabilité de $[t \mapsto f(x,t)]$ si $x > 0$ a été prouvée lors de l'étude de la définition de L_v

Pour la domination : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-t(\ln t)e^{-xt}\right| = t|\ln t|e^{-tx}$ donc, pour $x \geqslant a$ et $t > 0$:
(on part de la contrainte)
$x \geqslant a \Rightarrow_{-t<0} -tx \leqslant -ta \Rightarrow e^{-tx} \leqslant e^{-ta} \Rightarrow t|\ln t|e^{-tx} \leqslant t|\ln t|e^{-ta}$ soit $\left|\dfrac{\partial f}{dx}(x,t)\right| \leqslant |g(a,t)| = \varphi_a(t)$
où φ_a est bien continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ (puisque l'intégrabilité de $[t \mapsto g(a,t)]$ lorsque $a > 0$ a été prouvé lors de l'étude de la définition de L_w
• Conclusion : L_v est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$
Or $\bigcup_{a>0} [a,+\infty[=]0,+\infty[$ et la classe C^1 est une propriété locale donc $\boxed{L_v \text{ est } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$
De plus : $\forall x > 0,\quad L_v'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} -t\ln t e^{-tx}\,dt = -L_w(x)$

3. Montrer que $xL_v'(x) = -\dfrac{1}{x} - L_v(x)$ pour $x > 0$

$xL_v'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t\ln t)(-xe^{-xt})\,dt$ par IPP avec $\begin{cases} u(t) = t\ln t \\ v'(t) = -xe^{-xt}\end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = 1+\ln t \\ v(t) = e^{-xt}\end{cases}$ avec u, v C^1 sur $]0,+\infty[$
$[(t\ln t)e^{-xt}]_0^{+\infty} = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} (t\ln t)e^{-xt}}_{=0 \text{ par croissance comparée}} - \underbrace{\lim_{t\to0^+} (t\ln t)e^{-xt}}_{=0\times1=0} = 0$ CV
On sait aussi que $xL_v'(x)$ CV, l'IPP est possible puisque deux termes sur les trois convergent et on a :
$xL_v'(x) = 0 - \displaystyle\int_0^{+\infty} (1+\ln t)e^{-xt}\,dt = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - L_v(x)$ (possible car on sait que 2 termes $xL_v'(x)$ et $L_v(x)$ sur les 3 CV)
soit : $xL_v'(x) = \left[\dfrac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} - L_v(x) \Leftrightarrow \boxed{xL_v'(x) = -\dfrac{1}{x} - L_v(x)}$

4. En déduire $L_v(x)$ en fonction de la constante $L_v(1)$

L_v est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $xy' + y = -\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow y' + \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{1}{x^2}$ (résolue sur $]0,+\infty[$)
L'ensemble des solutions est $y_p + \text{Vect}(h)$ où $h(x) = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$ avec $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et y_p une solution particulière qu'on recherche par variation de la constante sous la forme $y_p(x) = C(x)h(x)$ avec C dérivable sur $]0,+\infty[$
On a : $C'(x)h(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow C'(x) = -\dfrac{1}{x}$ d'où $C(x) = -\ln x$ convient et $y_p(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$
$L_v(x) = -\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{K}{x}$ pour $x > 0$ où K est une constante réelle qu'on précise en évaluant en $x = 1$: $L_v(1) = 0 + K$
Finalement : $\boxed{\forall x > 0,\ L_v(x) = \dfrac{L_v(1) - \ln x}{x}}$

EXEMPLE N° 1 On considère l'intégrale à paramètre $\left[\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt} \mathrm{d}t\right]$ sur $[0, +\infty[$

1. Calculer $\mathrm{F}(x)$ sans le symbole intégrale pour $x > 0$ puis calculer $\mathrm{F}(0)$. En déduire que F n'est pas continue en 0

Pour $x > 0$, on peut utiliser une primitive pour l'exponentielle :

$$\mathrm{F}(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-tx} \mathrm{d}t = x \left[\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_0^{+\infty} = x\left(0 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

D'autre part : $\mathrm{F}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 \times 1 \mathrm{d}t = 0$. Ainsi : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \mathrm{F}(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \neq 0 = \mathrm{F}(0)$ donc F n'est pas continue en 0

2. En déduire que le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre ne s'applique pas à F car l'hypothèse de domination est en défaut

Énonçons les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre appliquée à

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x e^{-xt}}_{f(x,t)} \mathrm{d}t \text{ où } \begin{cases} x \in [0, +\infty[\\ t \in [0, +\infty[\end{cases}$$

i) Pour $x \geqslant 0$, $[t \mapsto f(x, t)]$ est continue sur $[0, +\infty[$

ii) Pour $t \geqslant 0$, $[x \mapsto f(x, t)]$ est continue sur $[0, +\infty[$

iii) *Domination* : il existe φ positive, continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que : $\forall x \geqslant 0, \forall t \geqslant 0, \ |f(x, t)| \leqslant \varphi(t)$

La fonction de deux variables $\left[f : (x, t) \mapsto x e^{-xt}\right]$ est bien continue sur $\mathbb{R}^2$ par les théorèmes usuels donc i. et ii. sont vérifiées en passant aux applications partielles puisque $[0, +\infty[\times [0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2$.

C'est donc l'hypothèse iii) qui ne peut pas être vérifiée puisqu'on a vu que F n'est pas continue en 0 (donc pas continue sur $[0, +\infty[$

Trouver une domination consiste à faire disparaître "x" en majorant $|f(x, t)| = x e^{-tx}$ pour $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$:
si on part de la contrainte sur x : $x \geqslant 0 \Rightarrow_{-t \leqslant 0} -tx \leqslant 0 \Rightarrow e^{-tx} \leqslant 1 \Rightarrow_{x \geqslant 0} |f(x, t)| \leqslant x$ qui dépend encore de x !

3. Trouver une domination locale permettant de prouver que F est bien C^1 sur $]0, +\infty[$ avec le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre

Pour dominer, il faut contraindre x vers $+\infty$ (à cause du x en facteur) mais aussi le contraindre vers 0 (Si $0 \in \mathrm{I}$, la majoration de l'exponentielle est au mieux 1 ce qui conduit à une domination par une constante non intégrable)

Pour obtenir une domination indépendante de x, on peut donc travailler avec $x \in [a, \mathrm{A}] \subset]0, +\infty[$:
$a \leqslant x \leqslant \mathrm{A} \Rightarrow_{-t \leqslant 0} -\mathrm{A}t \leqslant -tx \leqslant -at \Rightarrow e^{-\mathrm{A}t} \leqslant e^{-tx} \leqslant e^{-at} \Rightarrow_{x > 0} x e^{-\mathrm{A}t} \leqslant x e^{-tx} \leqslant x e^{-at} \leqslant \mathrm{A} e^{-at}$
Ainsi : $\forall (x, t) \in [a, \mathrm{A}] \times [0, +\infty[, \ |f(x, t)| \leqslant \mathrm{A} e^{-at}$ et $[\varphi_{a,\mathrm{A}} : t \mapsto \mathrm{A} e^{-at}]$ est positive, continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ donc le théorème s'applique : F est C^0 sur tout intervalle $[a, \mathrm{A}] \subset]0, +\infty[$
Comme la continuité est une propriété locale et que $\displaystyle\bigcup_{0 < a < \mathrm{A}} [a, \mathrm{A}] =]0, +\infty[$, F est continue sur $]0, +\infty[$

Étude de la fonction Gamma $\quad \mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \mathrm{d}t \quad$ (Banque PT - Maths C - 2017)

On rappelle que l'intégrale de Gauss, qui est une intégrale convergente, donnée par $\quad \mathrm{I_G} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \quad$ a pour valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit G la fonction qui, à tout réel $x \geqslant 0$, associe : $\quad \mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, l'intégrale $\mathrm{G}(x)$ est convergente.

La fonction $\left[g : t \mapsto e^{-t} t^x\right] = \left[t \mapsto e^{-t} e^{x\ln t}\right]$ est C^0 sur $]0, +\infty[$ aussi il faut étudier la convergence en 0 et en $+\infty$
Attention à identifier tous les problèmes avec l'argument de continuité

• Pour $x = 0$, on reconnaît une intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ convergente.

• Pour $x > 0$, on étudie séparément le problème en 0 et celui en $+\infty$.

En 0 :

Méthode 1 : Puisque $x > 0$: $x \ln t \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty \Rightarrow g(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \times 0 = 0$ par les théorèmes usuels

donc g se prolonge par continuité en $t = 0$ par $g(0) = 0$ et $\mathrm{I_1} = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge (faussement généralisée).

Méthode 2 : $\begin{cases} g(t) \sim_0 t^x = \dfrac{1}{t^{-x}} \\ g(t) \geqslant 0 \text{ sur }]0,1] \end{cases}$ or la fonction $\left[t \mapsto \dfrac{1}{t^{-x}}\right]$ est une fonction de Riemann qui est intégrable en $+\infty$ lorsque $-x < 1 \Leftrightarrow x > -1$ et donc aussi pour $x > 0$ donc $\mathrm{I_1} = \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge

En $+\infty$: si $x > 0$, $\quad g(t) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \quad$ puisque $\quad \dfrac{g(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^2 g(t) = e^{-t} t^{x+2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad$ par croissance comparée

Or, $\left[t \mapsto \dfrac{1}{t^2}\right]$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann en $+\infty$) donc, par domination, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ de sorte que $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} |g(t)|\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \mathrm{I_2} \quad$ est convergente.

En définitive, $\mathrm{G}(x) = \mathrm{I_1} + \mathrm{I_2}$ converge pour $x > 0$. Ainsi : $\boxed{\text{l'intégrale } \mathrm{G}(x) \text{ est convergente pour } x \geqslant 0}$
N'hésitez pas à isoler un cas trivial (ici $x = 0$) de votre raisonnement principal si besoin !

2. Que vaut $\mathrm{G}(0)$?

Pour $x = 0$, on reconnaît l'intégrale de référence $\quad \mathrm{G}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = \boxed{1 = \mathrm{G}(0)}$

3. a) Soit A un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, et tout réel x de $[0, \mathrm{A}]$:

$$|e^{-t} t^x| \leqslant (1 + t^{\mathrm{A}}) e^{-t}$$

$\forall t > 0, \forall x \in [0, \mathrm{A}], \quad 0 < t^x = e^{x\ln t} \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0,1] \text{ car} x \ln t \leqslant 0 \\ e^{\mathrm{A}\ln t} = t^{\mathrm{A}} & \text{si } t > 1 \text{ car } x\ln t \leqslant \mathrm{A}\ln t \text{ puisque } \ln t > 0 \end{cases}$

Or $\begin{cases} 1 \leqslant 1 + t^{\mathrm{A}} \text{ car } t^{\mathrm{A}} > 0 \\ t^{\mathrm{A}} \leqslant 1 + t^{\mathrm{A}} \end{cases}$ d'où, par transitivité : $\quad 0 < t^x \leqslant 1 + t^{\mathrm{A}} \Rightarrow_{e^{-t} > 0} |e^{-t} t^x| = e^{-t} t^x \leqslant (1 + t^{\mathrm{A}}) e^{-t}$

Là encore, c'est une question de transition sur laquelle il ne faut pas perdre trop de temps...L'objectif est de préparer la domination de la question suivante.

b) Montrer que G est continue sur $[0, A]$.

Lorsque vous repérez l'utilisation d'un théorème d'intégrale à paramètre, commencez par bien poser les notations si le sujet ne l'a pas fait (ici introduire la fonction de 2 variables de l'intégrande).
Il faut aussi bien mettre en évidence les hypothèses du théorème que vous utilisez. Je vous conseille : soit de les énoncer toutes avant de les démontrer soit de faire un récapitulatif des hypothèses juste avant de conclure.

$G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \,dt$ où $x \geqslant 0$ et $g(x,t) = e^{-t} t^x = e^{-t} e^{x \ln t}$ est une intégrale à paramètre avec $\begin{cases} x \in [0, A] \\ t \in]0, +\infty[\end{cases}$.

Montrons que G est de classe C^0 sur $[0, A]$ en appliquant le théorème. Il s'agit de vérifier :

i) $\forall x \in [0, A]$, $[t \mapsto g(x,t)]$ est continue sur $]0, +\infty[$

ii) $\forall t > 0$, $[x \mapsto g(x,t)]$ est continue sur $[0, +\infty[$

iii) Il existe φ continue, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ avec : $\forall x \in [0, A], \forall t > 0$, $\left|g(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

La fonction de deux variables g est de classe C^0 sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ qui contient $[0, A] \times]0, +\infty[$. Ses applications partielles seront donc C^0 sur leurs domaines de définition respectifs et donc i) et ii) sont vérifiées.

$\forall x \in [0, A], \forall t > 0$, $|g(x,t)| = |e^{-t} t^x| \leqslant (1 + t^A) e^{-t} = \varphi(t)$ en utilisant a)
Alors, φ est bien C^0, positive sur $]0, +\infty[$. Il reste à prouver l'intégrabilité. Or : $\varphi(t) = e^{-t} + t^A e^{-t} = e^{-t} + g(A, t)$
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ CV (intégrale de référence) et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(A,t) dt = G(A)$ CV donc, par somme, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ CV et donc φ est bien intégrable sur $]0, +\infty[$. Conclusion : Les hypothèses i),ii) et iii) sont vérifiées et $\boxed{\text{G est bien } C^0 \text{ sur } [0, A]}$

Inutile de perdre du temps pour justifier l'intégrabilité : pensez à exploiter les questions déjà faites.

c) Montrer que G est de classe C^∞ sur $[0, A]$.

Une question sur laquelle on peut légitiment passer du temps car le raisonnement à suivre est classique, il y a beaucoup de points de cours (raisonnement par récurrence, théorème de dérivation) qui vont être évalués indépendamment de la réussite ou non des vérifications des hypothèses. Même si elle n'est pas totalement traitée, on peut espérer obtenir une bonne partie des points en détaillant les grandes lignes du raisonnement et en énonçant les points de cours adéquats.

Pour obtenir le caractère C^∞, on mène une démonstration par récurrence avec l'hypothèse à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$HR_n : \text{« G est de classe } C^n \text{ sur } [0, A] \text{ et, pour } x \in [0, A],\ G^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^x e^{-t} dt \text{ »}$$

Il est naturel d'envisager que chacune des dérivations impliquent une dérivation partielle en x de l'intégrande. Or, chaque dérivation en x (à t constant) de $g(x,t) = e^{-t} e^{x \ln t}$ entraîne l'apparition d'un facteur $\ln t$ d'où la conjecture faite pour l'expression de $G^{(n)}(x)$

Initialisation : HR_0 consiste simplement à vérifier que G est C^0 sur $[0, A]$ ce qui a été fait dans b)

Hérédité : On prouve : $HR_n \Rightarrow HR_{n+1}$. On suppose donc que HR_n vérifiée.

Pour prouver HR_{n+1}, il s'agit de montrer que $G^{(n)}$ est de classe C^1 sur $[0, A]$.

Or : $G^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x,t) dt$ où $h_n(x,t) = (\ln t)^n e^{-t} t^x$ est aussi une intégrale à paramètre.

Il suffit donc de vérifier les hypothèses du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre :

i) $\forall x \in [0, A]$, $[t \mapsto h_n(x,t)]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

ii) $\forall t > 0$, $[x \mapsto h_n(x,t)]$ est de classe C^1 sur $[0, A]$

iii) $\forall x \leqslant [0, A]$, $\left[t \mapsto \dfrac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur $]0, +\infty[$

iv) Il existe φ continue, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ avec : $\forall x \in [0, A], \forall t > 0$, $\left|\dfrac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

La fonction de deux variables h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ qui contient $[0,A]\times]0,+\infty[$. Ses applications partielles seront donc C^1 sur leurs domaines de définition et donc ii) et iii) sont vérifiées et aussi l'application $[t\mapsto h_n(x,t)]$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Aussi, pour établir i), il suffit de vérifier $\displaystyle\int_0^{+\infty}|(\ln t)^n e^{-t}t^x|\mathrm{d}t$ CV. On étudie la convergence en 0 et en $+\infty$:

En $t=0$:

- si $x>0$: $|(\ln t)^n e^{-t}t^x| = \underbrace{e^{-t}}_{\xrightarrow[t\to 0]{}1}\times\underbrace{|(\ln t)^n|e^{x\ln t}}_{\xrightarrow[t\to 0]{}0_{\text{si } x>0}}0\xrightarrow[t\to 0]{}0$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0

- si $x=0$: $\sqrt{t}|h_n(0,t)| = \sqrt{t}|(\ln t)|^n e^{-t}\sim_{t\to 0} t^{\frac{1}{2}}|\ln t|^n \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \Rightarrow |h_n(0,t)| = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ or $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ CV donc $\displaystyle\int_0^1|h_n(0,t)|\mathrm{d}t$ CV

(croissance comparée) (Riemann en 0 avec $\alpha=\frac{1}{2}<1$) (par domination)

En $t=+\infty$: Par croissance comparée, $t^2|h_n(x,t)| = \underbrace{|(\ln t)^n e^{-\frac{t}{2}}|}_{\xrightarrow[t\to 0]{}0}\times\underbrace{t^{x+2}e^{-\frac{t}{2}}}_{\xrightarrow[t\to 0]{}0}\xrightarrow[t\to 0]{}0 \Rightarrow |h_n(x,t)| = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ CV, on a, par domination, $\displaystyle\int_1^{+\infty}|h_n(x,t)|\mathrm{d}t$ CV

Ainsi : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|(\ln t)^n e^{-t}t^x|\mathrm{d}t = \int_0^1|h_n(x,t)|\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}|h_n(x,t)|\mathrm{d}t$ CV par somme et i) est bien vérifiée.

Remarquons : on a, en fait démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\geqslant 0,\ \displaystyle\int_0^{+\infty}|h_n(x,t)|\mathrm{d}t$ converge $(*)$

Il reste à vérifier l'hypothèse de domination :

$\forall x\in[0,A],\forall t>0,\ \dfrac{\partial h_n}{\partial x}(x,t) = (\ln t)^{n+1}e^{-t}t^x$ aussi : $\left|\dfrac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\left|(\ln t)^{n+1}\right|(1+t^A)e^{-t}$ avec a)

Posons $\varphi(t) = \left|(\ln t)^{n+1}\right|(1+t^A)e^{-t} = |h_{n+1}(t,0)|+|h_{n+1}(t,A)|$ alors φ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ et elle est intégrable par somme à cause de $(*)$. Ainsi, iv) est vérifiée.

Bien évidemment, c'est cette partie de vérifications des hypothèses et, en particulier, la domination qui est difficile.

La question teste votre capacité à pouvoir mener un raisonnement complexe avec plusieurs enchaînement logiques. Cela demande ordre et organisation dans le raisonnement ainsi que dans la présentation de celui-ci.

Puisque i),ii),iii) et iv) est vérifiée, on a bien $\boxed{G^{(n)} \text{ de classe } C^1 \text{ sur } [0,A]}$ et donc G de classe C^{n+1} sur $[0,A]$.

De plus : $G^{(n+1)}(x) = \left(G^{(n)}\right)'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial h_n}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \boxed{\int_0^{+\infty}(\ln t)^{n+1}e^{-t}t^x\mathrm{d}t = G^{(n+1)}(x)}$

Conclusion : Par principe de récurrence simple, on peut conclure que HR_n est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$

Ainsi, $\boxed{G \text{ est bien de classe } C^\infty \text{ sur } [0,A]}$

d) En déduire que la fonction G est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ et exprimer, pour tout entier naturel n et pour tout $x\geqslant 0$, $G^{(n)}(x)$ sous forme d'une intégrale.

Le caractère C^∞ est une propriété locale et le résultat précédent étant vrai pour tout $A>0$. Vu que $\displaystyle\bigcup_{A>0}[0,A] = [0,+\infty[$, on peut conclure que

$$\boxed{G \text{ est bien de classe } C^\infty \text{ sur } [0,+\infty[\text{ De plus : } \forall n\in\mathbb{N},\forall x\geqslant 0,\ G^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty}(\ln t)^n e^{-t}t^x\mathrm{d}t}$$

4. Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$: $G(x+1) = (x+1)G(x)$

Pour $x \geqslant 0$: $G(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} \mathrm{d}t$

On réalise une intégration par parties avec : $\left| \begin{array}{l} u(t) = t^{x+1} \\ v'(t) = e^{-t} \end{array} \right.$ puis $\left| \begin{array}{l} u'(t) = (x+1)t^x \\ v(t) = -e^{-t} \end{array} \right.$ où u et v sont C^1 sur $]0, +\infty[$

• l'intégrale $G(x+1)$ est convergente puisque $x+1 \geqslant x \geqslant 0$

• $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = [t^{x+1}e^{-t}]_0^{+\infty} = \lim\limits_{t \to +\infty} t^{x+1}e^{-t} - \lim\limits_{t \to 0^+} t^{x+1}e^{-t} = 0 - 0$

par croissance comparée en $+\infty$ et $t^{x+1}e^{-t} \sim_0 t^{x+1} = e^{(x+1)\ln t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$ puisque $x+1 > 0$

L'intégration par parties est possible et on a : $G(x+1) = 0 - \int_0^{+\infty} (x+1)t^x(-e^{-t})\mathrm{d}t = \boxed{(x+1)G(x) = G(x+1)}$

Attention! Une IPP (ou un changement de variables) n'est pas toujours indiqué par le sujet.

5. Calculer, pour tout entier naturel n : $G(n)$

Si $n = 0$ alors $G(n) = 1$. Si $n > 0$, $G(n) = nG(n-1) = n(n-1) \times \cdots \times 1 \times G(0) = n!$

Plus rigoureusement, on prouve le résultat par une récurrence avec l'hypothèse HR_n; « $G(n) = n!$ »

Initialisation : $0! = 1$ et $G(0) = 1$ donc HR_0 est vraie.

Hérédité : Si HR_n vraie alors $G(n) = n!$ et comme $G(n+1) = (n+1)G(n) = (n+1) \times n! = (n+1)!$, on a bien HR_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : Par récurrence simple, HR_n est vraie pour tout n entier soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ G(n) = n!}$

Peut-on se dispenser de rédiger la récurrence? Je n'ai pas vraiment de réponse...Ce qui est sûr, c'est que, lorsque le résultat est donnée, il faut faire la récurrence

6. Que vaut $G\left(\frac{1}{2}\right)$?

Une question difficile car sans indication...Il est naturelle d'essayer l'un des théorèmes IPP ou changement de variables mais il est moins courant d'envisager d'enchaîner les deux. Attention à ne pas perdre trop de temps en recherches qui n'aboutissent pas sur cette question...

Méthode 1 : $G\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ aussi, afin de se rapprocher de l'intégrale donnée $\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\mathrm{d}s$

on pose $t = s^2 = \varphi(s)$ alors $\mathrm{d}t = 2s\mathrm{d}s$ $\quad t \left| \begin{array}{c} +\infty \\ 0 \end{array} \right. \quad s \left| \begin{array}{c} +\infty \\ 0 \end{array} \right.$

C'est possible puisque φ est de classe C^1, strictement croissante donc bijective de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$.

Les intégrales $G\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} \underbrace{\sqrt{s^2}}_{=|s|=s} \times 2s\mathrm{d}s$ sont de même nature convergente et sont égale.

Ainsi : $G\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} 2s^2 e^{-s^2}\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} s \times 2se^{-s^2}\mathrm{d}s$ et on réalise alors une intégration par parties avec :

$\left| \begin{array}{l} u(s) = s \\ v'(s) = 2se^{-s^2} \end{array} \right.$ puis $\left| \begin{array}{l} u'(s) = 1 \\ v(s) = -e^{-s^2} \end{array} \right.$ où u et v sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$

• l'intégrale $G\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} u(s)v'(s)\mathrm{d}s$ est convergente

• $[u(s)v(s)]_0^{+\infty} = [-se^{-s^2}]_0^{+\infty} = \lim\limits_{s \to +\infty} \left(-se^{-s^2}\right) + 0 = 0$ par croissance comparée.

L'intégration par parties est possibles et on a : $G\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - \int_0^{+\infty} -e^{-s^2}\mathrm{d}s = I_G = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2} = G\left(\frac{1}{2}\right)}$

Remarque : On peut faire aussi d'abord une IPP (en dérivant $\sqrt{t}$) puis un changement de variable $t = s^2$