CHAPITRE IX: ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel réel.

I) Produit scalaire et norme

I-1) Définition et exemples usuels

Définition : Produit scalaire

Étant donné un espace vectoriel réel E, un **produit scalaire** sur E est une application $\left[\begin{array}{cccc}\langle .,. \rangle : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \langle x,y \rangle\end{array}\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\langle .,. \rangle$ est symétrique c'est à dire que : $\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
2. $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire c'est à dire que : $\forall x_0 \in E, \quad [x \mapsto \langle x_0, x \rangle]$ et $[x \mapsto \langle x, x_0 \rangle]$ sont linéaires
   En pratique, si 1. *est prouvé, il suffit seulement de démontrer la linéarité d'une seule des deux applications*
3. $\langle .,. \rangle$ est positive et définie c'est à dire que : $\forall x \in E, \quad \langle x,x \rangle \geqslant 0$ et $\langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

On dit qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E × E

Le produit scalaire des vecteurs x et y de E pourra être noté, selon le contexte, $\langle x,y \rangle$, $(x|y)$ ou encore $x.y$

Remarque : $\forall x \in E, \quad \langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, x \rangle$

Définitions : Espace préhilbertien et espace euclidien

Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire est appelé **un espace préhilbertien**.
Si, de plus, cet espace vectoriel est de dimension finie, on dit alors que E est **un espace euclidien**

I-2) Les exemples de référence

On va munir les espaces vectoriels classiques de produit scalaire qu'on appellera le **produit scalaire canonique**.

1. Le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est définie par

$$\boxed{\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

En identifiant $\mathbb{R}^n$ avec l'espace $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes, on a $\boxed{\langle x,y \rangle = X^T Y}$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Généralisation sur un espace de suites : Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors $\langle x,y \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k$ n'existe pas toujours.

Mais : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Aussi, pour tout k réel : $0 \leqslant |x_k y_k| \leqslant \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2)$ de sorte que :

$$\left\{\begin{array}{l}\sum x_k^2 \text{ converge} \\ \sum y_k^2 \text{ converge}\end{array}\right. \Rightarrow \sum x_k y_k \text{ converge absolument (et donc } \langle x,y \rangle \text{ existe)}$$

On peut définir un produit scalaire sur l'espace $E = \left\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\right\}$ qui est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Le produit scalaire euclidien de $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ est définie par

$$\boxed{\forall (f,g) \in C^0([a,b],\mathbb{R})^2,\ \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}$$

Généralisation sur un intervalle I quelconque :

Pour f et g dans $C^0(I,\mathbb{R})$, $\langle f,g\rangle = \int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$ n'existe pas toujours. Mais : $\forall t \in I,\quad |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}(f^2(t)+g^2(t))$

$$\left\{\begin{array}{l} f^2 \text{ intégrable sur I : } \int_I f^2(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \\ g^2 \text{ intégrable sur I : } \int_I g^2(t)\mathrm{d}t \text{ converge}\end{array}\right. \Rightarrow \int_I |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \text{ converge ie } fg \text{ est intégrable sur I} \Rightarrow \langle f,g\rangle \text{ converge.}$$

On peut définir le produit scalaire sur $L_2(I,\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^0(I,\mathbb{R}) \mid \int_I f^2(t)\mathrm{d}t \text{ converge}\right\}$ qui est un sev de $C^0(I,\mathbb{R})$

3. Un produit scalaire classique de $\mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est défini par $\boxed{\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t}$

On peut munir un espace de plusieurs produit scalaire :

$\boxed{(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k}$ est un autre produit scalaire classique sur $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Le produit scalaire euclidien de $M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est définie par

$$\boxed{\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2,\quad \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)}$$

I-3) Norme et distance associées à un produit scalaire

Définitions : Norme et distance dans un espace préhilbertien

Soit $\left(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle\right)$ un espace préhilbertien,

la **norme préhilbertienne** associée est l'application $\left[\begin{array}{rcl} \|.\| : \mathrm{E} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array}\right]$ et on définit **la distance** entre deux vecteurs x et y de E comme le réel positif $\left\|x - y\right\|$

Lorsque $\left(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle\right)$ est un espace euclidien, on parle de **norme euclidienne** et de **distance euclidienne**.

Remarque :

1. La définition de la norme est assurée par la positivité : $\forall x \in \mathrm{E},\ \langle x, x \rangle \geqslant 0$ d'où $\|x\|$ existe.
2. Le caractère défini du produit scalaire induit que : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ x = y \Leftrightarrow \left\|x - y\right\| = 0$
3. La norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est : $\boxed{\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$

   En particulier, on retrouve les normes usuelles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: $\left\|(x, y)\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\left\|(x, y, z)\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Proposition : Propriété de la norme

Soit $\left(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle\right)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée, on a :

- $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \|\alpha x\| =$
- $\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathrm{E}}$
- $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \left\|x + y\right\|^2 = \|x\|^2 + \left\|y\right\|^2 + 2\left\langle x, y \right\rangle$ *(Identité remarquable)*

I-4) Les égalités et inégalités classiques associées à une norme euclidienne

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\left(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle\right)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée, on a

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \left|\left\langle x, y \right\rangle\right| \leqslant \|x\| \left\|y\right\| \Leftrightarrow \left|\left\langle x, y \right\rangle\right|^2 \leqslant \|x\|^2 \left\|y\right\|^2$$

L'égalité a lieu si et seulement si la famille (x, y) est liée

Théorème : Inégalité triangulaire

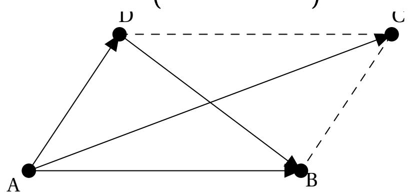
Une norme préhilbertienne vérifie l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \left\|x + y\right\| \leqslant \|x\| + \left\|y\right\|$

L'égalité a lieu si et seulement si la famille (x, y) est liée

Proposition : Identités du parallélogramme et de polarisation

Soit $\left(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle\right)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée, on a

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \textit{(Identité du parallélogramme)}$$



On obtient les formules dites de polarisation qui permettent de retrouver le produit scalaire à partir d'une norme :

$$\left\langle x, y \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\left\|x + y\right\|^2 - \|x\|^2 - \left\|y\right\|^2 \right) = \frac{1}{4}\left(\left\|x + y\right\|^2 - \left\|x - y\right\|^2 \right)$$

En pratique, lorsqu'on nous demande d'établir une inégalité, il est courant d'obtenir celle-ci en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des vecteurs bien choisis dans un espace préhilbertien bien choisi. Il est important de bien préciser l'espace E, le produit scalaire $\langle .,\rangle.$ et les vecteurs x et y utilisés quand on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

EXEMPLE N° 1 Montrer que, pour toute fonction f à valeurs réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f(0)=0$ alors:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^2(x) \leqslant x\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$$

On pourra utiliser le produit scalaire usuel sur $C^0([\min(0,x),\max(0,x)])$

II) Orthogonalité dans un espace préhilbertien

Dans cette partie, $(E,\langle .,.\rangle)$ désigne un espace préhilbertien (donc pas nécessairement de dimension finie) et $\|.\|$ est la norme associée.

II-1) Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore

Définition : vecteurs orthogonaux et famille orthogonale de vecteurs

- Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul i.e. $\langle x,y\rangle = 0$
- Un famille de vecteurs de E est orthogonale si elle est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux

La famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E où I ensemble quelconque est orthogonale lorsque :

$$\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j \Rightarrow \langle x_i,x_j\rangle = 0$$

Proposition :

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est une famille libre de vecteurs de E

Théorème : dit de Pythagore

Si $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ où $n\in\mathbb{N}^*$ est une famille orthogonale de E alors $\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2 = \|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2$

Dans le cas particulier où $n=2$, il y a même une équivalence :

$$x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$$

II-2) Sev orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition : Sev orthogonaux

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux lorsque $\forall (x,y)\in F\times G,\ \langle x,y\rangle = 0$

Proposition :

Si F et G sont des sev orthogonaux alors $F\cap G = \{0_E\}$ donc la somme de deux sev orthogonaux est forcément directe.

Définition : Orthogonal d'un sev

Si F est un sev de E,
l'orthogonal de F noté $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F

autrement dit : $F^\perp = \left\{x\in E \,\middle|\, \forall y\in F,\ \langle x,y\rangle = 0\right\}$

Proposition : Propriétés de l'orthogonal d'un sev

- $F^{\perp}$ est également un sous-espace vectoriel de E.
- F et $F^{\perp}$ sont des sev orthogonaux
- $\{0\}^{\perp} =$ et $E^{\perp} =$
- $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ *Attention, l'inclusion peut être stricte si* F *n'est pas de dimension finie*
- Si F et G sont des sev de E alors : $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$

EXEMPLE N° 2 Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$,
Montrer que: $F \oplus F^{\perp} = E \Rightarrow (F^{\perp})^{\perp} = F$ *Cela sera en particulier vérifié si* F *est de dimension finie*

Proposition : Orthogonal d'un sev de dimension finie

Soit F est un sev de dimension finie de l'espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$,
si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de F alors $F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle x, e_i \rangle = 0\}$

EXEMPLE N° 3 On munit $M_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\left(A^{T}B\right)$
Déterminer l'orthogonal de l'ensemble D des matrices diagonales

II-3) Famille orthonormale et procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition : Famille orthonormale (ou orthonormée) de vecteurs

Une famille de vecteurs de E est orthonormales (ou orthonormée) lorsqu'elle est orthogonale et qu'elle est constituée de vecteurs unitaires (c'est à dire de norme 1)

EXEMPLE N° 4 On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$

1. Justifier que $\left(E, \langle .,. \rangle\right)$ est un espace euclidien.

2. Si $n = 3$, démontrer que $F = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X(X-1) \text{ divise } P\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X^2 - 5X + 6\right)$ sont des sev orthogonaux.

3. On considère la famille des polynômes de Lagrange: $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $L_i = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X-k}{i-k}$

Justifier que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de E

Exemples de bases orthonormées :
- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$
- La base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^{T}B)$
- La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

mais elle ne l'est pas pour d'autre produit scalaire. Par exemple pour $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ alors

$$\langle 1, X \rangle = \int_0^1 1 \times t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

Théorème : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ où $N \in \mathbb{N}^*$ est une famille libre de vecteurs de E, alors il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ vérifiant :

- $\forall n \in [\![1, N]\!], \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \quad (1)$
- $\forall n \in [\![1, N]\!], \langle e_n, \varepsilon_n \rangle > 0 \quad (2)$

Vous devez être capable de mettre en œuvre pratiquement l'algorithme pour un nombre restreint de vecteurs.

Mise en œuvre pratique pour l'orthonormalisation de (e_1, e_2, e_3)

1. On construit $\varepsilon_1 =$

2. On cherche ε_2 sous la forme avec

- $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0$
- ε_2 est unitaire or

3. On cherche ε_3 sous la forme avec

- $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_3 \rangle = 0 = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle$ déterminant ainsi
- ε_3 est unitaire déterminant ainsi

EXEMPLE Nº 9/2 : Déterminer une base orthonormée de l'hyperplan H d'équation $x + y + z - t = 0$ dans $\mathbb{R}^4$

EXEMPLE Nº 5 Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on définit

$$\langle x, y \rangle = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

1. Prouver que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

2. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ pour ce produit scalaire.

Corollaire : Existence de base orthonormale pour les sev de dimension finie

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors F possède une base orthonormale qu'on obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à une base quelconque de F.

II-4) Orthogonalité dans un espace euclidien

Proposition : Existence des bases orthonormales dans un espace euclidien

Si $(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace euclidien (donc de dimension finie) alors il existe des bases orthonormales.

Proposition : Calculs dans une base orthonormée

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$

et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ les colonnes de coordonnées des vecteurs x et y dans $\mathscr{B}$

- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \langle e_i, x \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^T X}$
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors le coefficient situé ligne i colonne j est $[A]_{ij} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$

III) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

III-1) Supplémentaire orthogonal en dimension finie

Théorème : Suplémentaire orthogonal en dimension finie

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $\big(E, \langle .,. \rangle\big)$
alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires c'est à dire que : $F \oplus F^\perp = E$

On dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans l'espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$

Corollaire : Sev orthogonaux et dimension

Si $\big(E, \langle .,. \rangle\big)$ est un espace euclidien (càd $\dim E < +\infty$) alors,
pour tout sev F de E, on a $F \oplus F^\perp = E$ de sorte que $\dim F + \dim(F^\perp) = \dim E$

Corollaire : Vecteur normal à un hyperplan d'un espace de dimension finie

Si $\big(E, \langle .,. \rangle\big)$ est un espace euclidien (càd $\dim E < +\infty$) munit d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ l'hyperplan H d'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nul a pour orthogonal la droite vectorielle $H^\perp = \mathrm{Vect}\big(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\big)$. Un vecteur non nul $\vec{n}$ de $H^\perp$ est appelé vecteur normal à l'hyperplan H

III-2) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Définition Projection orthogonale sur un sev de dimension finie :

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$, on a : $F \oplus F^\perp = E$

On définit **la projection orthogonale sur** F comme le projecteur p_F sur F parallèlement à $F^\perp$

$$\text{Ainsi : } \operatorname{Ker} p_F = F^\perp \text{ et } \operatorname{Im} p_F = \operatorname{Ker}(p_F - id) = F$$

Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F, on a : $\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \, e_i}$

Remarque : Une application linéaire f d'un espace euclidien E est une projection orthogonale lorsque
$f \circ f = f$ et $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux

Proposition : Caractérisation du projeté orthogonal

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$ et $x \in E$,

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$

Méthode : Détermination pratique d'un projeté orthogonal

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$ et $x \in E$,
on peut déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F de deux façons :

- soit en déterminant une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F (obtenue par exemple en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une base quelconque de F) puis en calculant $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle \, e_i$
- soit en recherchant le vecteur $p_F(x)$ à l'aide des conditions $\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$

EXEMPLE N° 6 Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^4$, on considère le sev F d'équation $\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x+3y+z-t=0 \end{cases}$.
Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonal sur F.

III-3) Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition : Distance d'un vecteur à sous-espace vectoriel

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle)$ et si $x \in \mathrm{E}$,
on appelle distance de x à F le réel noté $d(x,\mathrm{F})$ défini par : $d(x,\mathrm{F}) = \inf\{\|x-f\| \mid f \in \mathrm{F}\}$

Théorème :

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle)$ et si $x \in \mathrm{E}$,
alors $d(x,\mathrm{F}) = \|x - p_\mathrm{F}(x)\|$ où $p_\mathrm{F}(x)$ est la projection orthogonale de x sur F

$p_\mathrm{F}(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise cette égalité : $\begin{cases} f \in \mathrm{F} \\ d(x,\mathrm{F}) = \|x-f\| \end{cases} \Leftrightarrow f = p_\mathrm{F}(x)$

Remarque : Puisque $p_\mathrm{F}(x)$ et $x - p_\mathrm{F}(x)$ sont des vecteurs orthogonaux, on a, en vertu du théorème de Pythagore :

$$d(x,\mathrm{F}) = \|x - p_\mathrm{F}(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_\mathrm{F}(x)\|^2}$$

EXEMPLE N° 7 Déterminer $\inf\left\{\int_0^\pi (t - a\cos t - b\sin t)^2 \mathrm{d}t \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$