Consigne : Travailler en classe inversée le chapitre.

CONSEILS MÉTHODOLOGIQUES POUR TRAVAILLER EN CLASSE INVERSÉE LES PARTIES I À V DE CE CHAPITRE

1. Munissez vous du poly, d'un papier, d'un crayon et de surligneurs. L'idée est d'accompagner votre lecture par l'écrit et par de la mise en évidence en couleurs des points importants.
2. Les exemples ont vocation à être chercher d'abord seul avant de consulter la correction.
3. N'hésitez pas à m'envoyer des questions par mail auxquelles j'essaierai de répondre le plus vite possible.
4. Je vous propose d'étaler le travail en plusieurs séances

   Séance nº 1 Définition et limites (pages 2,3 et 4) *(Environ 1h30)*

   Séance nº 2 Continuité (pages 5 à 8 + 4 lignes en haut de la page 9) *(Environ 2h)*

   Séance nº 3 Classe C^1 (pages 9 à 13) *(Environ 2h30)*

   Séance nº 4 Classe C^2 (pages 14 à 16) *(Environ 1h30)*

   Séance nº 5 Dérivées de fonctions composées (pages 17 à 19) *(Environ 1h30)*

Nous réaliserons des TD à la rentrée qui travailleront les définitions et les méthodologies introduites dans ce chapitre. En particulier, les exemples 11, 12 et 13 de chapitre feront l'objet d'une séance de TD.

CHAPITRE VIII: FONCTIONS DE DEUX OU TROIS VARIABLES

Dans ce chapitre, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munit de leurs structures euclidiennes usuelles respectives permettant de définir le produit scalaire de deux vecteurs et la norme d'un vecteur. Les définitions élémentaires sur la topologie de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ont été données dans le chapitre I (notion de boule, de partie ouverte, partie bornée, de point adhérent, d'intérieur, de frontière d'une partie, etc)

On va s'intéresser aux applications f à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur une partie $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^3$)

$$\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}\right] \quad \left(\text{resp.} \left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \end{array}\right]\right)$$

Il s'agit donc des fonctions que vous rencontrez le plus souvent en physiques ou SII... Exemples :

- la force d'attraction F d'un corps sur un autre corps dépend de la masse m de ce corps et de la distance r entre les deux corps : $\mathrm{F} = \mathrm{F}(m,r)$ La loi d'attraction universelle de Newton est, ainsi : $\mathrm{F} = \underbrace{\mathrm{GM}}_{\text{constante}} \times \dfrac{m}{r^2}$

- le volume V occupé par un gaz est une fonction dépendant de la quantité de matière n, de la pression P de la température T du gaz soit $\mathrm{V} = \mathrm{V}(n, \mathrm{P}, \mathrm{T})$ Par exemple, pour un gaz parfait : $\mathrm{V} = \underbrace{\mathrm{R}}_{\text{constante}} \times \dfrac{n\mathrm{T}}{\mathrm{P}}$

I) Limites et continuité

I-1) Ensemble de définition, applications partielles

L'ensemble de définition est l'ensembles des couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ (resp. des triplets (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$) pour lesquels l'expression $f(x,y)$ (resp. $f(x,y,z)$) existe.

On peut le représenter comme une partie du plan (resp. de l'espace).

Par exemple : $f(x,y) = \sqrt{1+x+y}$ existe pour $1+x+y \geqslant 0$ Dans $\mathbb{R}^2$, cette inéquation caractérise le demi-plan P_+ limité par la droite d'équation $y = -x-1$ qui contient l'origine $(1+0+0 \geqslant 0)$

En un point $a = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ (resp $a = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathbb{R}^3$,

on associe à une fonction de plusieurs variables des applications appellées **les applications partielles** :

elles sont obtenues en laissant libre une des variables et en fixant les autres

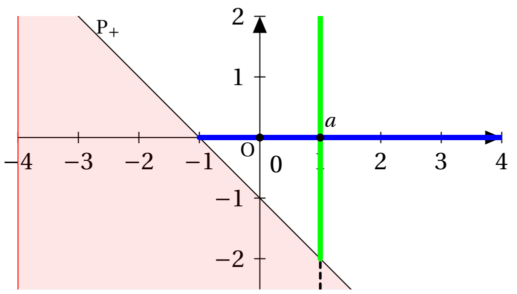
Notations :

- $\left[f(.,y_0) : x \mapsto f(x,y_0)\right]$ et $\left[f(x_0,.) : y \mapsto f(x_0,y)\right]$ sont associées à $\left[f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right]$ en $a = (x_0, y_0)$
- $\left[f(.,y_0,z_0) : x \mapsto f(x,y_0,z_0)\right]$, $\left[f(x_0,.,z_0) : y \mapsto f(x_0,y,z_0)\right]$ et $\left[f(x_0,y_0,.) : z \mapsto f(x_0,y_0,z)\right]$ sont les 3 applications partielles associées à $\left[f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\right]$ en $a = (x_0, y_0, z_0)$

Attention ! $f(.,y_0)$ *est le nom de la fonction dont l'expression est* $f(.,y_0)(x) = f(x,y_0)$ *comme* ln *est le nom de la fonction logarithme d'expression* $\ln(x)$ *ou* g *est le nom d'une fonction d'expression* $g(x)$...

Par exemple : les applications partielles de la fonction $f : (x,y) \mapsto \sqrt{1+x+y}$ en $a = (1,0) \in \mathrm{P}_+$ sont

$$\left[f(.,0) : t \mapsto \sqrt{1+t}\right] \quad \text{et} \quad \left[f(1,.) : t \mapsto \sqrt{2+t}\right]$$



On visualise, ici, le demi-plan P_+ et le point $a = (1,0)$
Sur l'axe d'équation $y = 0$, on visualise en bleu le domaine de définition de $f(.,0)$:
$f(t,0)$ est définie pour $t \geqslant -1$ soit sur $[-1, +\infty[$
Sur l'axe d'équation $x = 1$, on visualise en vert le domaine de définition de $f(1,.)$: $f(1,t)$ existe pour $t \geqslant -2$

EXEMPLE N° 1 Déterminer et représenter l'ensemble de définition et expliciter les applications partielles

$$f_1(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f_2(x,y)=\frac{\sqrt{x+y}}{x^2y} \qquad f_3(x,y)=\ln(1-x^2-y^2) \qquad f_4(x,y)=\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)$$

1. $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$ donc f_1 est définie sur $D_1=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ (càd le plan $\mathbb{R}^2$ privé du point O).
Rôle symétrique de x et y dans $f_1(x,y)$ d'où $f_1(x,.)=f_1(.,x)$
si $x\neq 0$: $f_1(x,.)=f_1(.,x)=\left[t\mapsto \dfrac{tx}{x^2+t^2}\right]$ qui est définie sur $\mathbb{R}$
si $x=0$: $f_1(0,.)=f_1(.,0)=[t\mapsto 0]$ définie sur $\mathbb{R}^*$

2. $f_2(x,y)$ existe si $x^2y\neq 0$ et $x+y\geqslant 0$
Or: $x^2y=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$ correspond aux deux axes
et: $x+y\geqslant 0$ décrit le demi-plan fermé limité par la droite $y=-x$ qui contient le point $(1,1)$
Ainsi, f_2 est définie sur le domaine D_2 qui est le demi-plan précédent privé des axes du repère.
Pas de symétrie, on précise donc les deux applications partielles en $a=(x,y)\in D_2$:
$f_2(x,.)=\left[t\mapsto \dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{\sqrt{x+t}}{t}\right]$ définie sur $[-x,+\infty[-\{0\}$ et $f_2(.,y)=\left[t\mapsto \dfrac{1}{y}\times\dfrac{\sqrt{y+t}}{t^2}\right]$ définie sur $[-y,+\infty[-\{0\}$

3. $f_3(x,y)$ existe si $1-x^2-y^2>0 \Leftrightarrow x^2+y^2<1$ donc f_3 est définie sur D_3 qui est l'intérieur du disque unité.
Rôle symétrique de x et y et, pour x réel dans $[-1,1]$:
$f_3(x,.)=f_3(.,x)=\left[t\mapsto \ln(1-x^2-t^2)\right]$ définie sur $\left]-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\right[$

4. $f_4(x,y)$ existe si $x^2+y^2\neq 0$ et $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\in[-1,1]$ *Rappel: Arcsin*: $[-1,1]\to\mathbb{R}$ *avec Arcsin*$([-1,1])=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
$x^2+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$ *(Une somme de nombre* $\geqslant 0$ *est nulle si tous les termes sont nulles...)*
$\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\in[-1,1]\Leftrightarrow\left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$ *Rappel:* $|x|\leqslant a\Leftrightarrow x\in[-a,a]$
Une inégalité classique d'analyse (à retenir et redémontrer!) $\boxed{|2xy|\leqslant x^2+y^2 \quad \text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2}$
$2xy$ et x^2+y^2 doivent faire penser aux identités remarquables $x^2+y^2\pm 2xy=(x\pm y)^2$
Alors: $(|x|-|y|)^2=x^2+y^2-2|xy|\geqslant 0\Leftrightarrow 2|xy|\leqslant x^2+y^2$ et si, de plus, $(x,y)\neq(0,0)$, on a: $\left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$
Le domaine de définition de f_4 est donc $D_4=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ (càd le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine O)
Rôle symétrique de x et y dans $f_4(x,y)$:
$f_4(x,.)=f_4(.,x)=\left[t\mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2tx}{x^2+t^2}\right)\right]$ définie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^*$ selon que $x\neq 0$ ou $x=0$.

I-2) Limites

On généralise aisément la notion de limite vu pour les fonctions d'une seule variable réelle :
Rappel : $[f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}]$ *admet une limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *en* $a \in \mathrm{I}$ *(noté* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$*) lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{I},\ |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

Définition : Limite en un point adhérent

Pour $p \in \{2,3\}$, on dit que $\left[f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}\right]$ admet une limite au point a_0 adhérent à D lorsque

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall a \in \mathrm{D},\ \|a-a_0\| \leqslant r \Rightarrow |f(a)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une boule centrée en a_0 telle que, pour les points a de cette boule, $|f(a)-\ell| \leqslant \varepsilon$

Si $p = 2$, alors $a_0 = (x_0, y_0)$ et $a = (x, y)$ et $\|a - a_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$
Si $p = 3$ alors $a_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $a = (x, y, z)$ et $\|a - a_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

Si la limite existe, alors elle est unique et on note : $\ell = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ou $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} \ell$
(resp. $\ell = \lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)$ ou $f(x,y,z) \xrightarrow[(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)]{} \ell$)

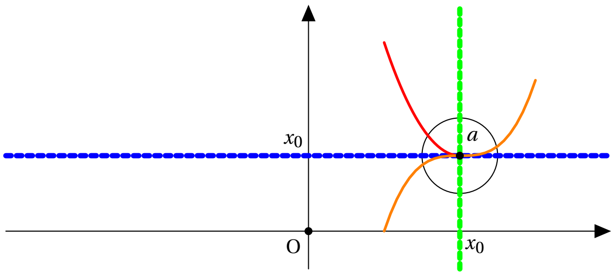
Preuve de l'unicité : Supposons qu'il y a 2 limites ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$ de sorte que : $|\ell_1 - \ell_2| = d > 0$
On utilise la définition avec $\varepsilon = \dfrac{d}{3}$: on obtient $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ avec $\begin{cases} |f(a)-\ell_1| \leqslant \varepsilon \text{ si } \|a-a_0\| \leqslant r_1 \\ |f(a)-\ell_2| \leqslant \varepsilon \text{ si } \|a-a_0\| \leqslant r_2 \end{cases}$
On choisit a avec $\|a - a_0\| \leqslant \min(r_1, r_2)$ (possible car $\min(r_1, r_2) > 0$) alors
$d = |\ell_1 - \varepsilon_2| \leqslant \|\ell_1 - f(a)| + |f(a) - \ell_2| \leqslant \dfrac{d}{3} + \dfrac{d}{3} \Rightarrow d \leqslant \dfrac{2d}{3} \Rightarrow \dfrac{d}{3} \leqslant 0$: c'est absurde car $d > 0$!

Remarques : Si la limite de f en a existe alors les applications partielles admettent aussi la même limite :

$$\text{Si } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{t\to x_0} f(t, y_0) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to y_0} f(x_0, t) \text{ existent et valent } \ell$$

Attention ! La réciproque est fausse !

L'existence d'une limite en $a = (x_0, y_0)$ suppose d'approcher a non seulement dans les directions parallèle aux axes (en vert et bleu ci-dessous) qui correspondent aux directions utilisées dans les applications partielles mais aussi dans toutes les directions (d'autres façons d'approcher de a sont proposées en rouge et en orange) ci-dessous.



Un contre-exemple :

Les applications partielles de $\left[f_1 : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}\right]$ en $(0,0)$ possèdent une même limite mais f_1 n'a pas de limite.

$f_1(t, 0) = f_1(0, t) = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc les deux applications partielles en $(0,0)$ possèdent la même limite nulle.
Mais, si on s'approche de $(0,0)$ autrement que selon les directions des axes, alors on trouve des valeurs différentes :
$f_1(t,t) = \dfrac{t^2}{t^2+t^2} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{1}{2} \neq 0$ en approchant de $(0,0)$ le long de la première bissectrice du plan
Remarque : On peut approcher de $(0,0)$ *autrement par exemple :*
- en approchant le long de la droite $y = mx$ *:* $f_1(t, mt) = \dfrac{mt^2}{t^2 + m^2 t^t} = \dfrac{m}{1+m^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{m}{1+m^2}$
- en approchant le long de la parabole $y = x^2$ *:* $f_1(t, t^2) = \dfrac{t^3}{t^2+t^3} \sim_{t\to 0} \dfrac{t^3}{t^2} = t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

Méthode : Nier l'existence d'une limite

Pour établir que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ n'existe pas, on trouve 2 façons d'approcher (x_0, y_0) avec des limites différentes pour f.

I-3) Continuité

La notion de continuité s'obtient naturellement à partir de la notion de limite :

Définition : Continuité d'une fonction de 2 ou 3 variables

- On dit que $[f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ est continue en $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}$ lorsque $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$
- On dit que $[f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}]$ est continue en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{D}$ lorsque $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0)$
- On dit que $[f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}]$ (où $p \in \{2,3\}$) est continue sur D si f est continue en tout point de D
  On note alors parfois cette propriété : f est C^0 sur D ou $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{D}, \mathbb{R})$

Remarque : La continuité de f entraîne naturellement celle de ses applications partielles.

Attention ! Là encore, la réciproque est fausse.

Méthode : Comment étudier la continuité de f ponctuellement en $a = (x_0, y_0)$?

1. On commence toujours par ramener le problème en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0)$$

2. Si la question est « Étudier la continuité de f en a » ou « f est-elle continue en a ? »
voir directement « Montrer que f n'est pas continue en a » alors
la réponse peut éventuellement être négative aussi on essaye quelques directions particulières classiques :
si on trouve une direction telle que f ne tend pas vers $f(a)$, on nie la continuité et c'est terminé.
On commence par vérifier les directions des axes (applications partielles) : $\lim\limits_{t\to0} f(x_0+t, y_0)$ et $\lim\limits_{t\to0} f(x_0, y_0+t)$
Ensuite, on utilise en général des directions selon des droites linéaires $y = mx$: $\lim\limits_{t\to0} f(x_0+t, y_0+mt)$
(en particulier les bissectrices du plan pour $m = \pm1$)
On peut éventuellement regarder des courbes plus évoluées comme des paraboles :

$$\lim_{t\to0} f(x_0+t, y_0+t^2) \quad \text{ou} \quad \lim_{t\to0} f(x_0+t^2, y_0+t)$$

Attention ! Ne pas perdre trop de temps à s'obstiner à chercher à nier la continuité alors qu'il y a continuité...

3. Si la question est « Montrer que f est continue en a »
ou que nos tentatives pour nier la continuité ont toutes échouées, alors il s'agit d'établir

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) \Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)\Big) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big|f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)\Big| = 0$$

de sorte qu'on majore : $\Big|f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0)\Big|$ par une quantité qui tend vers 0.

Comme pour les études de continuité des fonctions d'une seule variable, on dispose de théorèmes usuels qui permettre de gérer « presque tous les cas » et il ne restera donc que quelques cas ponctuels à traiter.

Propositions : Continuité et opérations usuelles

- une combinaison linéaire de fonctions continues sur D est une fonction continue sur D
- un produit de fonction continues sur D est une fonction continue sur D
- Si $\begin{cases} [f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}] \text{ (où } p \in \{2,3\} \text{) est } \mathrm{C}^0 \text{ sur D} \\ [u : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}] \text{ est } \mathrm{C}^0 \text{ sur I} \\ f(\mathrm{D}) \subset \mathrm{I} \end{cases}$ alors $u \circ f$ est C^0 sur D
- L'inverse ou un quotient de fonctions continues sur D est continue sur D si le dénominateur ne s'y annule pas.

L'inverse est un cas particulier de composition $\dfrac{1}{f} = u \circ f$ où $u = \left[t \mapsto \dfrac{1}{t}\right]$. Le quotient est un produit : $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$

Les preuves s'appuient sur la définition de la limite et sont similaires aux cas d'une seule variable vu en PTSI.

Nous appliquerons les théorèmes usuels à partir de fonctions de référence dont on connaît la continuité :

Exemples de référence : (on présente les résultats pour 2 variables mais ils s'adaptent facilement pour 3 variables)

- Les projections $[(x,y)\mapsto x]$ et $[(x,y)\mapsto y]$ sont C^0 sur $\mathbb{R}^2$.

  On applique le point 1. et 3. de la méthodologie :
  Si $p=[(x,y)\mapsto x]$, alors, pour tout $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$: $|p(x_0+h,y_0+h)-p(x_0,y_0)|=|(x_0+h)-x_0|=|h|\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$
  Preuve analogue pour l'autre projection $q=[(x,y)\mapsto y]$.

- Les fonctions monômes $[(x,y)\mapsto x^n y^m]$ où $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ fixés sont C^0 sur $\mathbb{R}^2$

  Si $f=[(x,y)\mapsto x^n y^m]$ alors $f=\underbrace{p\times\cdots\times p}_{n\text{ fois}}\times\underbrace{q\times\cdots\times q}_{m\text{ fois}}$ d'où le résultat par produit de fonctions continues.

- Les fonctions polynômiales (i.e. les combinaisons linéaires de fonctions monômes) sont C^0 sur $\mathbb{R}^2$.

  par combinaison linéaire de fonctions continues.

Il reste à utiliser les théorèmes usuels sur ces fonctions de référence pour justifier la continuité en général.

SUITE EXEMPLE N° 1 Justifier la continuité des applications de l'exemple 1 sur leurs domaines de définition

- $[(x,y)\mapsto xy]$ et $[(x,y)\mapsto x^2+y^2]$ sont C^0 sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiales et $x^2+y^2\neq 0$ sur $D_1=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ donc, par quotient, f_1 est C^0 sur D
- On rappelle que f_2 est définie sur le domaine D_2 qui est le demi-plan de frontière $y=-x$ contenant $(1,1)$ privé des deux axes du repère.

  $$\left\{\begin{array}{l}[(x,y)\mapsto x+y]\text{ est } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ donc aussi sur } D_2\\ u=[t\mapsto\sqrt{t}]\text{ est } C^0\text{ sur }[0,+\infty[\\ \forall(x,y)\in D_2, x+y\geqslant 0\end{array}\right. \Rightarrow [(x,y)\mapsto\sqrt{x+y}] \text{ est } C^0 \text{ sur } D_2 \text{ par composition.}$$

  $[(x,y)\mapsto x^2y]$ sont C^0 sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiales et $xy\neq 0$ sur D_2 donc, par quotient, f_2 est C^0 sur D_2
- On rappelle que f_3 est définie à l'intérieur du cercle unité (centre O, rayon 1) bord exclu.

  $$\left\{\begin{array}{l}[(x,y)\mapsto 1-x^2-y^2]\text{ est } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ donc aussi sur } D_3\\ u=[t\mapsto\ln t]\text{ est } C^0\text{ sur }]0,+\infty[\\ \forall(x,y)\in D_3, 1-x^2-y^2>0\end{array}\right. \Rightarrow f_3 \text{ est } C^0 \text{ sur } D_3 \text{ par composition.}$$
- On rappelle que $D_4=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

  Par quotient de fonctions polynômiales, $\left[v:(x,y)\mapsto\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right]$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ car $x^2+y^2\neq 0$

  $$\left\{\begin{array}{l}v\text{ est } C^0 \text{ sur } D_4\\ \text{Arcsin est } C^0\text{ sur }[-1,1]\\ \forall(x,y)\in D_4, v(x)\in[-1,1]\end{array}\right. \Rightarrow f_4 \text{ est } C^0 \text{ sur } D_4 \text{ par composition.}$$

Lorsqu'il reste des points non pris en charge par les théorèmes usuels, on peut :

- nier la continuité en ces points lorsqu'on trouve des directions particulières où il n'y a pas continuité (on vérifie la continuité des applications partielles et on pourra utiliser les indications du sujet pour obtenir de telles directions) (cf Exemple n°2)

- prouver la continuité en ces points par des majorations (cf méthodologie à suivre et Exemple n°3)

EXEMPLE N° 2 Étudions la continuité des applications suivantes : $g(0,0)=h(0,0)=0$ et, pour $(x,y)\neq(0,0)$:

$$g(x,y)=\frac{\sqrt{|x|+|y|}}{x^2+|y|} \quad \text{et} \quad h(x,y)=\frac{x^3y}{x^6+y^2}$$

1. Justifier la continuité de g et h sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

• La fonction h est un quotient de deux fonctions polynômiales avec celles au dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ aussi on peut dire que h est continue sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$
• De même, u où $u(x,y)=|x|+|y|$ et v où $v(x,y)=x^2+|y|$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ par somme et elles sont à valeurs positives. La fonction racine est continue sur $[0,+\infty[$ donc $\left[(x,y)\mapsto\sqrt{|x|+|y|}\right]$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, $v(x,y)\neq 0$ sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ aussi le quotient $f=\dfrac{u}{v}$ est continue sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

2. En examinant la limite $\lim\limits_{t\to 0} g(0,t)$, conclure sur la continuité de g en $(0,0)$.

$g(0,t)=\dfrac{\sqrt{|t|}}{|t|}=\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}\xrightarrow[t\to 0]{}+\infty$ donc g n'est pas continue en 0 puisque l'une des applications partielles n'est pas continue

3. a. Justifier que les applications partielles de h sont continues en $(0,0)$.

$h(t,0)=0\xrightarrow[t\to 0]{}0=h(0,0)$ et $h(0,t)=0\xrightarrow[t\to 0]{}0=h(0,0)$ aussi il y a continuité des deux applications partielles en $(0,0)$

b. Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} h(t,t^3)$. La fonction h est-elle continue en $(0,0)$?

$h(t,t)=\dfrac{t^3\times t^3}{t^6+t^6}=\dfrac{1}{2}\xrightarrow[t\to 0]{}\dfrac{1}{2}\neq 0$ aussi h ne peut pas être continue en $(0,0)$ car $(t,t^3)\xrightarrow[t\to 0]{}(0,0)$ et la continuité de h en $(0,0)$ aurait imposé $\lim\limits_{t\to 0} h(t,t^3)=h(0,0)$

Méthode : Étudier la continuité d'une fonction de plusieurs variables

- On commence par appliquer les théorèmes usuels.
- Pour les points où f est définie non pris en charge par les théorèmes usuels, on fait une étude ponctuelle.
  On ramène le problème en $(0,0)$ lorsqu'il ne l'est pas. On examine (souvent de tête) quelques directions particulières classiques pour éventuellement nier la continuité. Si toutes fonctionnent,
  il reste à majorer $\left|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\right|$ par une quantité qui tend vers 0 :
  - soit en majorant astucieusement
  - soit en utilisant un passage en coordonnées polaires : $\begin{cases} h=r\cos\theta \\ k=r\sin\theta \end{cases}$ et $(h,k)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to 0$

EXEMPLE N° 3 Étudier la continuité de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par l'expression $f(x,y)$ (si elle n'existe pas $f(x,y)=0$) :

$$1)\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2} \qquad 2)\ f(x,y)=\frac{(x-1)(y+1)^3}{(x-1)^2+(y+1)^2} \qquad 3)\ f(x,y)=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

1. $[(x,y)\mapsto x^2y]$ et $[(x,y)\mapsto x^2+y^2]$ sont C^0 sur $\mathbb{R}^2$ et $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$ aussi, par quotient, f est C^0 sur $\mathscr{U}=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Pour l'étude ponctuelle en $(0,0)$, on majore $\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=|f(x,y)|$

Pas besoin de ramener le problème en $(0,0)$ puisqu'il y est déjà...

$f(0,0)=0$ car, d'après le sujet, « $f(x,y)=0$ si l'expression donnée n'existe pas en (x,y) »

Méthode n° 1: $\left|f(x,y)\right|=\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|y|\times\underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leqslant 1}\leqslant |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ en remarquant: $x^2\leqslant x^2+y^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leqslant 1$

Méthode n° 2: on pose $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ avec $r\to 0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ quelconque

$$\left|f(x,y)\right|=\left|f(r\cos\theta,r\sin\theta)\right|=\frac{r^3\overbrace{|\cos^2\theta\sin\theta|}^{\leqslant 1}}{r^2}\leqslant r\xrightarrow[r\to 0]{}0$$

Conclusion: f est aussi C^0 en $(0,0)$ donc finalement $\boxed{f \text{ est } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

2. Par les théorèmes usuels, f est C^0 sur $\mathscr{U}=\mathbb{R}^2-\{(1,-1)\}$ où $(x-1)^2+(y+1)^2\neq 0$.

On mène une étude ponctuelle en $(1,-1)$ en majorant $\left|f(1+h,-1+k)-f(1,-1)\right|=\left|f(1+h,-1+k)\right|$

$f(1,-1)=0$ car, d'après le sujet, « $f(x,y)=0$ si l'expression donnée n'existe pas en (x,y) »

$\left|f(1+h,-1+k)\right|=\dfrac{|h||k|^3}{h^2+k^2}=|hk|\times\underbrace{\dfrac{k^2}{h^2+k^2}}_{\leqslant 1}\leqslant |hk|\xrightarrow[h\to 0]{}0$ Conclusion: $\boxed{f \text{ est } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

On peut là encore passer en coordonnées polaires: $\left|f(1+r\cos\theta,-1+r\sin\theta)\right|=\dfrac{r^4\overbrace{|\cos\theta\sin^3\theta|}^{\leqslant 1}}{r^2}\leqslant r^2\xrightarrow[r\to 0]{}0$

3. $[(x,y)\mapsto y^2]$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2$

$[(x,y)\mapsto x^2+y^2]$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2$ et: $x^2+y^2>0\Leftrightarrow (x,y)\in\mathscr{U}=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Par composition, $[(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}]$ est C^0 sur $\mathscr{U}$ et ne s'y annule pas. Par quotient, f est C^0 sur $\mathscr{U}$.

On mène une étude ponctuelle en $(0,0)$ en majorant $\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|f(x,y)\right|$

$f(0,0)=0$ car, d'après le sujet, « $f(x,y)=0$ si l'expression donnée n'existe pas en (x,y) »

Méthode n° 1: $\left|f(x,y)\right|=\dfrac{|y||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\underbrace{\dfrac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leqslant 1}|y|\leqslant|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ en utilisant $|y|=\sqrt{y^2}$ astucieusement

Méthode n° 2: En passant en coordonnées polaires $\left|f(x,y)\right|=\left|f(r\cos\theta,r\sin\theta)\right|=\dfrac{r^2\overbrace{|\sin^2\theta|}^{\leqslant 1}}{r}\leqslant r\xrightarrow[r\to 0]{}0$

Là encore, on peut conclure que $\boxed{f \text{ est } C^0 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

Enfin, on admet la généralisation du résultat bien connu pour les fonctions continues sur un segment :

Proposition : (ADMIS)

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$ (où $p \in \{2,3\}$) est bornée et atteint ses bornes.

Ce résultat sera bien utile, en particulier, lorsqu'on étudiera les problèmes d'extrema (maximum ou minimum) d'une expression à plusieurs variables (plus tard dans l'année en application du théorème spectral)

II) *Dérivées partielles du premier ordre et classe* C^1

II-1) *Dérivées partielles d'ordre* 1 *et gradient*

Dans la suite du cours, on va définir les notions pour une application f à valeurs réelles définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ (c'est à dire qu'on travaille avec 2 variables) mais les définitions s'étendent sans difficulté à une application f à valeurs réelles définies sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ (lorsqu'il y a 3 variables)

Définition : dérivées partielles du premier ordre

Étant donné $\left[\begin{array}{rcl} f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y)\end{array}\right]$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et un point $a_0=(x_0,y_0)$ de $\mathcal{U}$, on dit que :

- f admet une dérivée partielle en a_0 selon la première variable (ou plus simplement selon x) lorsque l'application partielle $[x \mapsto f(x,y_0)]$ est dérivable en x_0. (resp. $[x \mapsto f(x,y_0,z_0))]$ est dérivable en x_0).

  On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ cette dérivée si elle existe (autre notation $\partial_1 f(a_0)$) .

- f admet une dérivée partielle en a_0 selon la seconde variable (ou plus simplement selon y) lorsque l'application partielle $[y \mapsto f(x_0,y)]$ (resp. $[y \mapsto f(x_0,y,z_0))]$ est dérivable en y_0).

  On note alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)$ cette dérivée si elle existe (autre notation $\partial_2 f(a_0)$).

L'existence d'une dérivée pour une fonction d'une variable est reliée à l'existence de la limite d'un taux d'accroissement donc

Caractérisation : Dérivées partielles par les taux d'accroissement

Étant donné $\left[\begin{array}{rcl} f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y)\end{array}\right]$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et un point $a_0=(x_0,y_0)$ de $\mathcal{U}$,

- f admet une dérivée partielle selon x en a_0 si $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe dans $\mathbb{R}$
- f admet une dérivée partielle selon y en a_0 si $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe dans $\mathbb{R}$

Pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la variation dans le taux d'accroissement porte uniquement sur la variable x. Situation analogue avec y pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Remarque : Si $[f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}]$ définie sur l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ admet des dérivées partielles en $a_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathcal{U}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+h)-f(x_0,y_0,z_0)}{h}}$$

Définition : Applications dérivées partielles

Si $[f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}]$ définie sur l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{U}$, on définit les applications dérivées partielles $\left[\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\end{array}\right]$ et $\left[\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial y}:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{array}\right]$

En pratique,

on calcule les dérivées partielles en dérivant selon une variable, les autres étant considérées constantes.

sauf pour une étude ponctuelle où l'existence de la dérivée s'obtient à l'aide de la limite d'un taux d'accroissement.

EXEMPLE N° 4

1. Déterminer les applications dérivées partielles de f si $f(x,y,z) = xyz^2$

2. Étudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et 0 sinon b) $f(x,y) = (x^2+y)\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et 0 sinon

1. Les applications partielles obtenues en laissant libre une variable et en fixant les autres sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^3$.

On remarque que les variables x et y ont un rôle symétrique dans l'expression $f(x,y,z)$ donc la dérivée partielle en x est la même que la dérivée partielle en y en échangeant les rôles de x et y:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(y,x,z) = xz^2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xyz$$

2. Il s'agit cette fois de déterminer des dérivées partielles ponctuelles (càd en un point donné) donc on revient à la définition avec les taux d'accroissements:

a. On étudie la limite en 0 de:

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t^3}{t^2}-0}{t} = \frac{t^3}{t^3} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existe et vaut } 1$$

$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ existe et vaut } 0$$

b. On étudie la limite en 0 de:

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{t^2\ln(t^2)-0}{t} = t\ln(t^2) = \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \text{ (croissance comparée) donc } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existe et vaut } 0$$

$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{t\ln(t^2)-0}{t} = \ln(t^2) \xrightarrow[t\to 0]{} -\infty \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ n'existe pas}$$

Définition : Gradient

Si $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ définie sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ admet des dérivées partielles en $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{U}$,

le gradient de f en a_0 est le vecteur de $\mathbb{R}^2$ noté $\overrightarrow{\text{grad}} f(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) \end{pmatrix}$ (parfois noté $\nabla f(x_0)$ en Physique-Chimie)

Remarque : Si $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}]$ définie sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^3$ admet des dérivées partielles en $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{U}$,

le gradient de f en a_0 est le vecteur de $\mathbb{R}^3$: $\nabla f(x_0) = \overrightarrow{\text{grad}} f(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a_0) \end{pmatrix}$

II-2) ***Fonctions de classe*** C^1

Commençons par la définition qui n'est pas sans rappeler celle vu pour le cas d'une seule variable réelle :

Définition : Fonction de 2 ou 3 variables de classe C^1

Si $p \in \{2,3\}$ et si $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$,

$[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}]$ est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ si f admet des dérivées partielles qui sont continues sur $\mathscr{U}$.

Bien sûr, on dispose toujours de théorèmes usuels :

Propositions : Classe C^1 et opérations usuelles

Si $p \in \{2,3\}$ et si $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$,

- une combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathscr{U}$
- un produit de fonction de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathscr{U}$
- Si $\begin{cases} [f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}] \text{ (où } p \in \{2,3\}\text{) est } C^1 \text{ sur } \mathscr{U} \\ [u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}] \text{ est } C^1 \text{ sur } I \\ f(\mathscr{U}) \subset I \end{cases}$ alors $u \circ f$ est C^1 sur $\mathscr{U}$
- un inverse ou un quotient de fonctions C^1 sur $\mathscr{U}$ est C^1 sur $\mathscr{U}$ si le dénominateur ne s'annule pas.

ainsi que de fonctions de références sur lesquelles nous appliquerons nos théorèmes :

Exemples et contre-exemples de références :

- $\boxed{\text{Toutes fonctions polynômiales est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$
- L'application f donnée par : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

  En effet, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $\boxed{\text{par quotient sachant } x^2+y^2 \neq 0}$ et : $\forall (x,y) \neq (0,0)$

  $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boxed{\dfrac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}}$ et, par symétrie des rôles de x et y : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boxed{\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$

  En $(0,0)$: $\boxed{\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{0-0}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut $\boxed{0}$

  et, par symétrie des rôles de x et y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut $\boxed{0}$

  Ainsi, f **admet des dérivées partielles sur** $\mathbb{R}^2$ **pourtant** f **n'est pas** C^0 **sur** $\mathbb{R}^2$

  En effet, f n'est pas C^0 en $(0,0)$: $f(t,t) = \dfrac{t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \dfrac{1}{2} \neq 0$

$\boxed{\text{L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité de l'application s'il y a plusieurs variables}}$

La situation est donc différente du cas où il n'y a qu'une seule variable où on sait

$$[f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}] \text{ est dérivable sur } I \Rightarrow f \text{ est } C^0 \text{ sur } I$$

Cela rappelle qu'une dérivée partielle n'est pas une dérivée...Elle ne donne que de l'information partielle.

Fort heureusement, on aura quand même :

Proposition : la classe C^1 entraîne la classe C^0

Si $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ alors f est aussi C^0 sur $\mathscr{U}$

Ce résultat est une conséquence de la formule de Taylor-Young pour les fonctions de deux variables présentée dans le paragraphe suivant.

II-3) Développement limité à l'ordre 1

Théorème : Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour les fonctions de 2 ou 3 variables (ADMIS)

Soient $p \in \{2,3\}$ et $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$,
si $\left[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}\right]$ est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$:

- si $p = 2$: $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(\|(h,k)\|)$
- si $p = 3$: $f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) = f(x_0,y_0,z_0) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + l\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) + o(\|(h,k,l)\|)$

Remarques et commentaires :

- D'abord, précisons la notion de o : $\quad o(\|(h,k)\|) = \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$

  et, de même : $\quad o(\|(h,k,l)\|) = \sqrt{h^2+k^2+l^2}\,\varepsilon(h,k,l)$ où $\varepsilon(h,k,l) \xrightarrow[(h,k,l)\to(0,0,0)]{} 0$
- Ensuite, cette formule permet bien de prouver la continuité de f en (x_0,y_0) :
  $$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(\|(h,k)\|) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0 \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + 0 \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + 0 = 0$$
  aussi on a bien $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0)$ autrement dit f est continue en (x_0,y_0)
- C'est ce que vous utilisez en Physique-Chimie quand vous avez une grandeur $f = f(x_1,\dots,x_n)$ qui dépend de plusieurs paramètre $x_1, x_2, \dots, x_n$ et que vous écrivez :
  $$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \quad \text{pour mesurer l'erreur} \quad f(x_1+\mathrm{d}x_1, \dots, x_n+\mathrm{d}x_n) - f(x_1,\dots,x_n)$$
- Application pour les courbes planes

  → Pour une fonction d'une variable de classe C^1 au voisinage de x_0, on peut écrire un $DL_1(0)$:
  $$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + o(|x-x_0|)$$
  et on rappelle que :

  $\boxed{y = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) \text{ est une équation cartésienne de la tangente en } M_0\big(x_0, f(x_0)\big) \text{ de la courbe } \mathscr{C}_f : \ y = f(x)}$

  → Pour une courbe plane Γ d'équation cartésienne $\quad f(x,y) = 0 \quad$ où f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$,

  on peut écrire un $DL_1(0)$ en un point M_0 de Γ : $\quad f(x_0+h, y_0+k) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o(\|(h,k)\|)$

  $f(x_0,y_0) = 0$ puisque M_0 est sur la courbe

  ou encore $\quad f(x,y) = (x-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + o\Big(\big\|(x-x_0, y-y_0)\big\|\Big)$

  Or, on rappelle que :
  Si M_0 est un point régulier de Γ (càd $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0,y_0) \neq (0,0)$) alors

  $\boxed{(x-x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \text{ donne une équation cartésienne de la tangente en } M_0 \text{ à } \Gamma : \ f(x,y) = 0}$

  et $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_0,y_0) \text{ dirige la normale à } \Gamma\text{, c'est un vecteur normal de la tangente à } \Gamma \text{ en } M_0(x_0,y_0)}$

Méthode : Étudier la classe C^1 d'une fonction de plusieurs variables

- On commence par appliquer les théorèmes usuels.
- Pour les points où f est définie mais qui ne sont pas pris en charge par les théorèmes usuels (appelé points « litigieux »), on étudie l'existence des dérivées partielles par une étude ponctuelle (taux d'accroissement)
- on précise alors les applications dérivées partielles (avec un calcul usuel de dérivées selon une variable les autres étant constantes pour les points non « litigieux »)
- on vérifie la continuité des dérivées partielles aux points « litigieux »

EXEMPLE N° 5 Préciser si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ lorsque

1) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$ 2) $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et 0 sinon

Pour 2), on pourra écrire $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et remarquer que $(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow r\to 0$

1. Par quotient de fonctions usuelles, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ puisque $x^2+y^2\neq 0$.

On vérifie les hypothèses lorsqu'on utilise un théorème usuel de quotient ou de composition.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$: On calcule les dérivées partielles là où s'applique les théorèmes usuels

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3x^2(x^2+y^2)-2x^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

On étudie l'existence des dérivées ponctuellement aux points non pris en charge par les théorèmes usuels (càd ici en $(0,0)$)

En $(0,0)$, on a déjà étudier l'existence des dérivées partielles dans l'exemple 4 précédent:

les dérivées partielles existent en $(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. On connaît donc les dérivées partielles:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Il reste à étudier la continuité en $(0,0)$ de ces dérivées partielles or on remarque que:

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,t)=\dfrac{-2t^4}{4t^4}=-\dfrac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 OU BIEN $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t)=0$ qui ne tend pas vers 1

Conclusion: $\boxed{f \text{ n'est pas de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$ mais

elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et elle admet des dérivées partielles définies sur $\mathbb{R}^2$

2. Par les théorèmes usuels, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ car $x^2+y^2>0$.

On vérifie les hypothèses lorsqu'on utilise le théorème usuel de composition ici avec ln.

On remarque que x et y ont un rôle symétrique donc il suffit d'étudier l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ car celle de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'en déduit. On obtient l'autre dérivée en échangeant les rôles de x et y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$ et, en $(0,0)$: $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\dfrac{0-0}{t}=0\xrightarrow[t\to 0]{}0$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. Ainsi: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}y\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

La continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ est déjà établie (puisque f y est C^1), on étudie la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$:

en passant en coordonnées polaire $(x,y)=\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$ comme le suggère le sujet alors:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\left|(r\sin\theta)\ln(r^2)+\frac{2(r\cos\theta)\times(r\sin\theta)}{r^2}\right|=\left|(r\sin\theta)\ln(r^2)+2r\cos^2\theta\sin\theta\right|$$
$$\leqslant |2r\ln(r)|+2r\xrightarrow[r\to 0]{}0$$

Conclusion: $\boxed{f \text{ est bien de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

III) *Dérivées partielles du second ordre et classe* C^2

Définition : Dérivées partielles du second ordre pour une fonction de deux ou trois variables

Soit $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ définie sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$, on dit que
f admet des dérivées partielles au second ordre en $(x_0, y_0) \in \mathscr{U}$ lorsque

- f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ définies au voisinage de (x_0, y_0)
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admettent également des dérivées partielles en (x_0, y_0)

Dans ce cas, il y a quatre dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0)$$

Remarque : on rencontre parfois les notations : $\partial_1\partial_2 f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $\quad \partial_1^2 f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0, y_0)$,...

On généralise, sans difficulté, cette définition au cas des fonctions de trois variables :

$[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}]$ définie sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^3$ admet des dérivées au second ordre en $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{U}$ si elle possède des dérivées partielles à l'ordre 1 définies au voisinage de a_0 qui possèdent des dérivées partielles en a_0.

Remarque : s'il y a trois variables, on comptabilise 9 dérivées partielles secondes

Définition : Classe C^2 pour une fonction de deux ou trois variables

$[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}]$ est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$ (où $p \in \{2, 3\}$) si elle admet des dérivées partielles secondes définies sur $\mathscr{U}$ et qui sont continues en tout point de $\mathscr{U}$.

Proposition : Classe C^2 et opérations usuelles

Les opérations usuelles sur les applications (combinaison linéaire, produit, composition, quotient) avec les hypothèses habituelles sont compatibles avec la classe C^2.

Proposition : Classe $\mathrm{C}^2 \Rightarrow$ Classe C^1

Si $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ est de classe C^2 sur $\mathscr{U}$ alors f est aussi C^1 sur $\mathscr{U}$

EXEMPLE N° 6 Justifier que $[f : (x, y) \mapsto \cos(xy)]$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles seconde.

$[(x, y) \mapsto xy]$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et cos est C^2 sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $[(x, y) \mapsto \cos(xy)]$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, on note que $f(x, y) = f(y, x)$ (càd que x et y ont un rôle symétrique)

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y\sin(xy)$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -y^2\cos(xy)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\sin(xy) - xy\cos(xy)$

Par symétrie: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y, x) = -x\sin(xy)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y, x) = -x^2\cos(xy)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(y, x) = -\sin(xy) - xy\cos(xy)$

Théorème : Théorème de Schwarz (ADMIS)

Si $\left[\begin{array}{ccc} f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_p) \end{array}\right]$ est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$ où $p \in \{2, 3\}$ alors :

$$\forall a \in \mathscr{U}, \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Ce théorème permet de gagner du temps en calcul mais il est aussi en général utilisé pour nier le caractère C^2.

Méthode : Négation du caractère C^2 pour une fonction de deux variables

Soit $[f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ admettant sur l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ des dérivées secondes,
si on trouve (x_0, y_0) avec $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ alors f n'est pas C^2 au voisinage de (x_0, y_0)

EXEMPLE N^o 7 *Le contre-exemple proposé par Schwarz en 1873*

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $f(x, y) = 0$ si $xy = 0$ et $f(x, y) = x^2 \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{y}$ si $xy \neq 0$

1. Montrer que f est admet des dérivées partielles à l'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.

Tout d'abord, il s'agit de bien lire la question: on ne demande de justifier que l'existence, pas de les calculer !

• On remarque que: $f(y, x) = -f(x, y)$ aussi l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ assure celle de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ vu que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

• Par les théorèmes usuels (composition, produit et CL), f est C^1 sur l'ouvert $\mathcal{U} = (\mathbb{R}^*)^2$ où $x \neq 0$ et $y \neq 0$
donc $\underline{\text{les dérivées partielles } \dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ existent sur } \mathcal{U} = (\mathbb{R}^*)^2}$

• Il reste à étudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ aux points $(a, 0)$ et $(0, a)$ avec $a \in \mathbb{R}$. On obtiendra l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en ces points à l'aide de l'argument de symétrie déjà évoqué.
Une étude ponctuelle d'existence de dérivée partielle se mène à l'aide de la limite d'un taux d'accroissement:

<u>En $(a, 0)$</u>: $\dfrac{f(a+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \dfrac{0-0}{h} = 0 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ donc $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, 0) \text{ existe et vaut } 0.}$

Avec la symétrie, on a aussi $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, a) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, 0) \text{ existe et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, a) = 0.}$

<u>En $(0, a)$ où $a \neq 0$</u>: $\dfrac{f(h, a) - f(0, 0)}{h} = \underbrace{h \operatorname{Arctan}\dfrac{a}{h}}_{|\ldots| \leqslant \frac{\pi}{2}|h| \xrightarrow[h\to 0]{} 0} - \underbrace{\dfrac{a^2}{h} \operatorname{Arctan}\dfrac{h}{a}}_{\sim_{h\to 0} \frac{a^2}{h} \times \frac{h}{a} \sim_{h \to 0} a \xrightarrow[h \to 0]{} a} \xrightarrow[h \to 0]{} -a$

donc $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, a) \text{ existe et vaut } \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, a) = -a}$ et, par symétrie: $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, 0) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, a) \text{ existe et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, 0) = -(-a) = a.}$

• $\boxed{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y} \text{ existent sur } \mathbb{R}^2}$ et on a: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ -y \text{ si } x = 0 \\ ? \text{ si } xy \neq 0 \end{cases}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x \text{ si } y = 0 \\ ?? \text{ si } xy \neq 0 \end{cases}$

<u>Remarque 1</u>: L'exercice ne demande pas de préciser la valeur des dérivée donc justifier l'existence suffit.
<u>Remarque 2</u>: Si, par contre, la question est « f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? », il faudrait alors étudier la continuité des dérivées partielles.Toujours, par symétrie, il suffit d'étudier la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Comme on sait aussi que f est C^1 sur $\mathcal{U}$, il s'agit d'étudier la continuité en $(a, 0)$ et $(0, a)$. Il y a donc beaucoup plus de travail !

2. Montrer que f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On pourra comparer les dérivées croisées en $(0, 0)$.

Existence et calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$: $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \dfrac{h-0}{h} = 1 \xrightarrow[t \to 0]{} 1$ donc $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \text{ existe et vaut } 1}$

Existence et calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$: $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \dfrac{-h-0}{h} = -1 \xrightarrow[t \to 0]{} -1$ donc $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \text{ existe et vaut } -1}$

Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, $\boxed{f \text{ ne peut pas être } C^2 \text{ au voisinage de } (0, 0)}$ à cause du théorème de Schwarz.

Remarque 3: Le calcul des dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ si $xy \neq 0$ n'est, là aussi, pas nécessaire pour traiter la question !

IV) *Généralisation pour les fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ où $p \in \{2,3\}$ et $n \in \{2,3\}$*

Dans le chapitre I, on a vu qu'on obtient les limites, la continuité et la dérivabilité d'une fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{array}\right]$ par l'intermédiaire des fonctions réelles $[t \mapsto f_i(t)]$ (fonctions coordonnées).
De même, on étend toutes les propriétés des fonctions réelles de 2 ou 3 variables aux fonctions vectorielles.

Définition : Fonctions coordonnées d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Soit $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \big(f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p)\big) \end{array}\right]$ définie sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$,
les applications $[f_i : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}]$ sont appelés **les fonctions coordonnées** de f.

Définitions : Limite, continuité , dérivées partielles, classe C^1 et C^2 d'une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Soit $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \big(f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p)\big) \end{array}\right]$ définie sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$,

- f admet une limite en $a \in \bar{\mathrm{U}}$ lorsque les applications coordonnées admettent chacune une limite en a et alors
$$\lim_{(x_1,\dots,x_p)\to a_0} f(x_1, \dots, x_p) = \left(\lim_{(x_1,\dots,x_p)\to a_0} f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, \lim_{(x_1,\dots,x_p)\to a_0} f_n(x_1, \dots, x_p)\right) \text{ est un vecteur de } \mathbb{R}^n$$
- f est continue en $a \in \mathscr{U}$ lorsque les applications coordonnées sont toutes continues en a
- f est continue sur $\mathscr{U}$ lorsque les applications coordonnées sont toutes continues en $\mathscr{U}$
- f admet une dérivée partielle selon la variable x_j en $a \in \mathscr{U}$ lorsque toutes les applications coordonnées admettent une dérivée partielle en a selon la variable x_j. On définit alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$

  Si f admet une dérivée partielle selon x_j en tout point de $\mathscr{U}$, on définit la fonction vectorielle dérivée partielle de f selon x_j par $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n\right]$
- f est de classe C^1 sur $\mathscr{U}$ lorsque toutes les applications coordonnées sont de classe C^1 sur $\mathscr{U}$
- f admet des dérivées partielles secondes sur $\mathscr{U}$ lorsque toutes les applications coordonnées admettent des dérivées partielles secondes sur $\mathscr{U}$. On définit alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i \partial x_j}(a), \dots, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $a \in \mathscr{U}$
- f est de classe C^2 sur $\mathscr{U}$ lorsque toutes les applications coordonnées sont de classe C^2 sur $\mathscr{U}$

EXEMPLE N° 8 On considère $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & \big(u, v, ue^v\big) \end{array}\right]$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et préciser ces dérivées partielles.

Les applications coordonnées $[f_1 : (u,v) \mapsto u]$, $[f_2 : (u,v) \mapsto v]$ et $[f_3 : (u,v) \mapsto ue^v]$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par les théorèmes usuels.
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \big(1, 0, e^v\big)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \big(0, 1, ue^v\big)$

2. Justifier l'existence et déterminer les dérivées partielles secondes.

Les applications coordonnées sont aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ par les théorèmes usuels ce qui assurent l'existence des dérivées au second ordre.
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) = \big(0,0,0\big)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) = \big(0, 0, ue^v\big)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u,v) = \big(0, 0, e^v\big) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)$

V) *Dérivées de fonctions composées*

V-1) *Dérivée selon un vecteur*

Considérons une application $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et $a=(a_1,a_2)\in\mathscr{U}$
Nous avons vu la définition des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f\big(a+t(1,0)\big)-f(a)}{t}$$

où il s'agit de faire un taux d'accroissement en se déplaçant respectivement « dans la direction du vecteur $(1,0)$ »

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2+t)-f(a_1,a_2)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f\big(a+t(0,1)\big)-f(a)}{t}$$

où il s'agit de faire un taux d'accroissement en se déplaçant respectivement « dans la direction du vecteur $(0,1)$ »
Généralisons « en se déplaçant dans la direction d'un $u=(u_1,u_2)$ »

$$\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}=\frac{f(a_1+tu_1,a_2+tu_2)-f(a_1,a_2)}{t}$$

Utilisons la formule de Taylor-Young puisque $tu=(tu_1,tu_2)\xrightarrow[t\to 0]{}(0,0)$:

$$f(a_1+tu_1,a_2+tu_2)=f(a_1,a_2)+(tu_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a)+(tu_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a)+\underbrace{o\big(\|tu\|\big)}_{o(t)}\quad\text{car } \|tu\|=\sqrt{(tu_1)^2+(tu_2)^2}=|t|\|u\|$$

de sorte que : $$\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}=\frac{(tu_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a)+(tu_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a)+o(t)}{t}=u_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+u_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)+o(1)$$

Lorsque t tend vers 0, ce taux d'accroissement a une limite qui est

$$u_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+u_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\big\langle\nabla f(a),u\big\rangle$$

(produit scalaire du gradient avec le vecteur u)

Si $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\right]$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^3$ et $a=(a_1,a_2,a_3)\in U$, on obtient, en adaptant le raisonnement précédent, que le taux d'accroissement a une limite pour tout choix de vecteurs $u=(u_1,u_2,u_3)$:

$$\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}=\frac{f(a_1+tu_1,a_2+tu_2,a_3+tu_3)-f(a_1,a_2,a_3)}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}u_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+u_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)+u_3\frac{\partial f}{dz}(a)=\big\langle\nabla f(a),u\big\rangle$$

Théorème : dérivées d'une fonction de plusieurs variables selon un vecteur

Si $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}\right]$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$ (où $p\in\{2,3\}$) et $a\in\mathscr{U}$
alors on dit que f admet une dérivée selon n'importe quel vecteur u de $\mathbb{R}^p$ car

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}=\big\langle\nabla f(a),u\big\rangle \text{ (produit scalaire du gradient avec le vecteur } u)$$

V-2) *Dérivée d'une fonction* $\left[t\mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)\right]$

On considère :

- une fonction $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}\right]$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$ (où $p\in\{2,3\}$
- une fonction vectorielle $\left[\gamma:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p\right]$ de classe C^1 autrement dit, si $\gamma(t)=\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$ alors les applications $[x_k:I\subset I\to\mathbb{R}]$ sont toutes C^1
- on suppose que : $\forall t\in I,\ \gamma(t)=\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)\in\mathscr{U}$

ainsi on peut définir une fonction à valeurs réelles de la variable réelle définie sur I : $f\circ\gamma=\Big[t\mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)\Big]$
On souhaite étudier la dérivabilité de $f\circ\varphi$ et, si c'est possible, calculer $\big(f\circ\gamma\big)'(t)$.
D'un point de vu géométrique, $[t\mapsto\gamma(t)]$ est une courbe paramétrée dessinée dans $\mathbb{R}^p$ et on recherche la dérivée de f le long de cette courbe.

$$\begin{aligned}
\frac{(f\circ\gamma)(t+h)-(f\circ\gamma)(t)}{h} &= \frac{1}{h}\Big[f\big(x_1(t+h),\dots,x_p(t+h)\big)-f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)\Big]\\
&= \frac{1}{h}\Big[f\big(x_1(t)+hx_1'(t)+o(h),\dots,x_p(t)+hx_p'(t)+o(h)\big)-f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)\Big]
\end{aligned}$$

car x_k de classe C^1 au voisinage de t donc $x_k(t+h)=x_k(t)+\underbrace{hx_k'(t)+o(h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{}0}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\Big[\big(hx_1'(t)+o(h)\big)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)+\dots+\big(hx_p'(t)+o(h)\big)\frac{\partial f}{\partial x_p}\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)\\
&\qquad +\underbrace{o\Big(\big\|(hx_1'(t)+o(h),\dots,hx_p'(t)+o(h))\big\|\Big)}_{=o(h)}\Big] \text{ en utilisant le DL}_1 \text{ de } f\\
&= x_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)+\dots+x_p'(t)\frac{\partial f}{\partial x_p}\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)+o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi : $f\circ\gamma$ est donc dérivable sur I avec : $\forall t\in \mathrm{I},\ (f\circ\gamma)'(t)=\sum_{i=1}^{p}x_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)=\big\langle\nabla f(\gamma(t)),\gamma'(t)\big\rangle$

(produit scalaire entre le gradient en $\gamma(t)$ et le vecteur dérivé $\gamma'(t)$)

et, même, $f\circ\gamma$ est de classe C^1 sur I puisque la dérivée est continue sur I

V-3) Dérivées partielles de $\big[(u,v)\mapsto f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\big]$

On considère maintenant :

- une fonction $\big[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n\big]$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et $n\in\{1,2,3\}$
- des fonctions $\big[x:\mathscr{V}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\big]$ et $\big[y:\mathscr{V}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\big]$ de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}^2$
- on suppose que : $\forall(u,v)\in\mathscr{V},\ \big(x(u,v),y(u,v)\big)\in\mathscr{U}$

ainsi on peut définir $\Phi=\big[(u,v)\mapsto f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\big]$ sur l'ouvert $\mathscr{V}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Étudions l'existence des dérivées partielles de Φ pour $(u_0,v_0)\in\mathscr{V}$:

- l'application partielle $\big[u\mapsto f\big(x(u,v_0),y(u,v_0)\big)\big]$ est dérivable au voisinage de u_0 d'après le résultat précédent avec $x_1=[u\mapsto x(u,v_0)]$ et $x_2=[u\mapsto y(u,v_0)]$. Les dérivées des fonctions x_1 et x_2 sont, par définition, des dérivées partielles selon u de x et de y.

Ainsi, $\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u_0,v_0)$ existe et : $\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)\big)+\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0)\big)$

On retient usuellement que : si $\Phi(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ alors $\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial u}}$

- La situation est similaire avec l'application partielle $\big[v\mapsto f\big(x(u_0,v),y(u_0,v)\big)\big]$ au voisinage de v_0 pour l'étude des dérivées partielles selon v et on a : $\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial v}}$ **Attention à bien comprendre ces formules!**

Personnellement, je reste très sceptique sur une application directe de ces formules souvent source d'erreurs.
Je préfère grandement l'approche suivante pour dériver selon u dans l'expression $\Phi(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$:
-je repère u dans la première variable de f qui donne, par composition, le terme $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v), y(u,v)\big)$
- je repère aussi u dans la seconde variable de f qui donne, par composition, le terme $\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v), y(u,v)\big)$
soit finalement : $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v), y(u,v)\big) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v), y(u,v)\big)$

EXEMPLE N° 9 Soit une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, justifier que g où $g(x,y) = f(x^2y, x+xy)$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles à l'aide de celles de f.

Si $u(x,y) = x^2y$ et $v(x,y) = x+xy$ alors u et v sont des fonctions polynômiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
Par composition, puisque f est aussi C^1 sur $\mathbb{R}^2$, $g = f(u,v)$ est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et :
$g(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ donc : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \underbrace{2xy}_{=\frac{\partial u}{\partial x}} \times \underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2y, x+xy)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)} + \underbrace{1+y}_{\frac{\partial v}{\partial x}} \times \underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2y, x+xy)}_{\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)}$

et : $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \underbrace{x^2}_{=\frac{\partial u}{\partial y}} \times \underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2y, x+xy)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(u,v)} + \underbrace{x}_{\frac{\partial v}{\partial y}} \times \underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2y, x+xy)}_{\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)}$

EXEMPLE N° 10 **Un grand classique !**

Pour $\big[f : (x,y) \mapsto f(x,y)\big]$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta; r\sin\theta)$.
Prouver que g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées premières et secondes de g à l'aide des dérivées de f

VI) *Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles*

L'objectif du programme est très limité : apprendre à résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP) qu'à travers des exemples simples et classiques.

VI-1) *Résolution par intégrations successives*

EXEMPLE N° 11 Déterminer les fonctions réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant:

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad 2)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy \quad 3)\ \frac{\partial f}{\partial x} = -f(x,y)$$

$$4)\ \overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \quad 5)\ \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad 6)\ 5)\ \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2+2x \\ 2yx^2+2y \end{pmatrix}$$

$$7)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \ \text{ où } f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad 8)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = xy \ \text{ où } f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

VI-2) *Résolution par changement de variables*

EXEMPLE N° 12 En utilisant le changement de variable proposé, résoudre sur l'ouvert $\mathcal{U}$ l'équation

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$ où f est C^1 sur $\mathcal{U} =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en passant en coordonnées polaires

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$ avec f de classe C^2 sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ en posant $\begin{cases} u = x - cy \\ v = x + cy \end{cases}$ *(É quation des cordes vibrantes)*

3. (E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x} - 4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec f de classe C^2 sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ en posant $u = x^2 - y$ et $v = x^2 + y$