CHAPITRE VII: INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

I) *Intégrales d'une fonction continue sur un intervalle*

Dans cette partie, a et b sont des réels avec $a \leqslant b$.

I-1) Intégrales d'une fonction continue sur le segment $[a,b]$ *(Rappel PTSI)*

Théorème : Somme de Riemann

Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ alors

$$\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

La somme de Riemann s'interprète comme la somme des aires algébriques des rectangles gauches construit sur la courbe à partir d'une subdivision de $[a,b]$ en n segments de longueur $\dfrac{b-a}{n}$

Interprétation géométrique : Le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ correspond à l'aire algébrique située entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On a donc $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t =$ et on convient que $\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t =$

On peut obtenir le même résultat en utilisant les rectangles droits :

Ce résultat conduit à une technique de calcul numérique des intégrales qu'on appelle la méthode des rectangles.

Exemple 0.5 : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{\frac{1}{n}}$

Proposition : Propriétés de l'intégrale

L'application $\left[f \mapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est linéaire de $\mathrm{C}^0([a,b])$ dans $\mathbb{R}$:

On dispose des propriétés

- de positivité de l'intégrale :
- de croissance de l'intégrale :
- Pour $f \in \mathrm{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow$

Proposition : Relation de Chasles et inégalité triangulaire

Si f est une fonction réelle continue sur l'intervalle I et $(a,b,c) \in \mathrm{I}^3$, on a

- Relation de Chasles :
- Inégalité triangulaire :

Le calcul pratique des intégrales repose sur le théorème fondamentale d'existence des primitives :

Théorème : Existence des primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I.
En particulier, si f est continue sur I et $a \in \mathrm{I}$, alors $\left[\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire : $\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)}$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a,b]$

Corollaire : Si $\left[u : \mathrm{J} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$ est une application dérivable sur l'intervalle J avec $u(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$
alors $\left[\mathrm{G} : x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est dérivable sur J avec : $\mathrm{G}'(x) =$

Exemple Justifier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et aussi $h'(x)$ pour x réel.

I-2) *Intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle quelconque*

Définition : Intégrale généralisée sur $[a,b[$ **ou** $]a,b]$

- Si f est une fonction réelle continue sur $[a,b[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\left[x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-.

  $$\text{On note : } \int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

  Si la limite n'existe pas ou vaut $\pm\infty$ alors on dit que l'intégrale diverge.
- De manière analogue : si f est une fonction réelle continue sur $]a,b]$, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\left[x\mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+

  $$\text{et on note : } \int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$$

  Si la limite n'existe pas ou vaut $\pm\infty$, on dit que l'intégrale diverge.

Exemples :

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est

- $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est

Proposition :

Si f est C^0 sur $[a,b[$ et $c\in[a,b[$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature (mais pas la même valeur si convergente)

La nature de l'intégrale généralisée ne dépend que du comportement de f au voisinage de b

La situation est analogue sur $]a,b]$: *la nature de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de a.*

Définition : Intégrale généralisée sur $[a,+\infty[$ **ou** $]-\infty,b]$

- Si f est une fonction réelle continue sur $[a,+\infty[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\left[x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$

  On note : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ Si la limite n'existe pas vaut $\pm\infty$, on dit que l'intégrale diverge.
- Si f est une fonction réelle continue sur $]-\infty,b]$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\left[x\mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$

  On note : $\displaystyle\int_{-\infty}^b f = \int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ Si la limite n'existe pas ou vaut $\pm\infty$, on dit que l'intégrale diverge.

Exemples :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^t \mathrm{d}t$ est

Proposition :

Si f est C^0 sur $[a,+\infty[$ et $c \in [a,+\infty[$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature (mais pas la même valeur si convergente) *La nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *ne dépend que du comportement de* f *au voisinage de* $+\infty$

De même : *La nature de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ *ne dépend que du comportement de* f *au voisinage de* $-\infty$

Définition : Intégrale généralisée sur $]a,b[$ ou sur $\mathbb{R}$

- Si f est une fonction réelle continue sur $]a,b[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent pour $c \in]a,b[$ quelconque
  On note alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ Si l'une des 2 intégrales divergent, l'intégrale diverge.
- Si f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ convergent pour $c \in \mathbb{R}$ quelconque
  On note alors : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ Si l'une des 2 intégrales divergent, l'intégrale diverge.

Remarque : Si les intégrales convergent pour un réel c, elles convergent pour tous les réels c de $]a,b[$ (resp. $\mathbb{R}$) puisque la nature des intégrales ne dépend que du comportement de f au voisinage de a et b (resp. $-\infty$ et $+\infty$)

Exemples :

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ est

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est

Attention! $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$ n'implique pas $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge

<u>Contre-exemple</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-x}^{x} t^3\,\mathrm{d}t =$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} t^3\,\mathrm{d}t$

Pourtant : $\forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in [c,+\infty[$, $\int_{c}^{x} t^3\,\mathrm{d}t$

I-3) Les exemples de références

Les exemples suivants constituent des intégrales de référence : vous devez en connaître la nature (sans avoir à refaire la démonstration même s'il faut la connaître)

- $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$ et, dans ce cas : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et, dans ce cas : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ (Intégrale de Riemann en $+\infty$)

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et, dans ce cas : $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ (Intégrale de Riemann en 0)

I-4) Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

Définition : Intégrale sur un intervalle d'une fonction continue à valeurs complexe

Si f est une fonction continue sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est convergente si les intégrales } \int_a^b \Re e(f)(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b \Im m(f)(t)\,\mathrm{d}t \text{ convergent.}$$

Dans ce cas, on a : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Re e(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \Im m(f)(t)\,\mathrm{d}t$

EXEMPLE N° 1 Convergence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)+i}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

I-5) Quelques propriétés de l'intégrale généralisée

Désormais, on choisit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de sorte que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ peut être une intégrale sur un intervalle réel borné (segment $[a,b]$, semi-ouvert $[a,b[$ ou $]a,b]$, ouvert $]a,b[$) ou non borné ($[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,+\infty[$) d'une fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Proposition :

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$,
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ ont même nature et, si elles convergent : $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Proposition : linéarité

Soient f et g des fonctions continues sur $]a,b[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent alors $\int_a^b \big(\lambda f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^b \big(\lambda f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Pour écrire une telle égalité, il faut s'assurer qu'au moins 2 intégrales sur les 3 sont convergentes !

EXEMPLE N° 2 Justifier l'existence et calculer $\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-9t+20}$

Proposition : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$,

si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente alors, pour tout réel $c \in]a,b[$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$

Corollaire : si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ convergente, alors : $\lim_{x\to b} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = 0$

Proposition : Positivité et croissance de l'intégrale

• Soit f une fonction positive et continue sur $]a,b[$,

si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ et aussi : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow f$ est nulle sur $]a,b[$

Attention, bien vérifier $f \geqslant 0$ et f C^0 sur $]a,b[$!

• Soient f et g des fonctions réelles continues sur $]a,b[$,

si $f \leqslant g$ sur $]a,b[$ et si les intégrales convergent, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

II) Les théorèmes de convergence

II-1) Prolongement continue d'une fonction

Proposition : Intégrale faussement généralisée

Si f est une fonction continue sur $[a,b[$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ prolongeable par continuité en b alors

l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$ où $\tilde{f}$ est le prolongement de f sur $[a,b]$

Remarque : on peut écrire un résultat analogue sur $]a,b]$ où $a\in\mathbb{R}$ avec un prolongement continue en a

Exemples : Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$

L'élève Bêta avance le raisonnement suivant pour justifier la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $a\in\mathbb{R}$:

« C'est vrai car la fonction f est continue sur $[a,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$ »

Proposer lui un contre-exemple en utilisant les intégrales de référence !

Attention ! On ne peut prolonger par continuité qu'en une singularité réelle ($a\in\mathbb{R}$ ou $b\in\mathbb{R}$ pas de $\pm\infty$!)

II-2) Théorème de comparaison pour les fonctions positives

Pour simplifier, on énonce les théorèmes de comparaison sur $[a,b[$ avec $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Théorème : CNS de convergence d'une intégrale d'une fonction positive

Si f est une fonction positive et continue sur $[a,b[$ alors

sa primitive $\left[x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est une application croissante sur $[a,b[$

de ce fait :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \left[x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] \text{ est majorée}$$

Théorème : Comparaison par inégalités

Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b[$,

- Si $\begin{cases} 0\leqslant f\leqslant g \\ \displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}\end{cases}$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Et, dans ce cas : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $\begin{cases} 0\leqslant f\leqslant g \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}\end{cases}$ alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarques :

- Quitte à scinder l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$, l'hypothèse $0\leqslant f\leqslant g$ ne peut être vérifiée qu'au voisinage de b.
- Les résultats s'adaptent :
  - si $f\geqslant 0$ sur $]a,b]$ alors $\left[x\mapsto\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est décroissante et : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow$ $\left[x\mapsto\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est minorée
  - si $f\leqslant 0$ sur $[a,b[$ alors $\left[x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est décroissante et : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow$ $\left[x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est minorée
  - si $f\leqslant 0$ sur $]a,b]$ alors $\left[x\mapsto\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est croissante et : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow$ $\left[x\mapsto\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est majorée

Exemple : Justifions la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *(On pourra scinder l'intégrale en* 1*)*

Attention, le résultat suivant n'est pas explicitement au programme car le critère d'équivalence n'est formulé que dans le cadre de l'absolue convergence (càd lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge) mais, pour les fonctions positives, les deux notions de convergence sont confondues donc...

Corollaire : critère d'équivalence pour les fonctions positives

Soient f et g des fonctions continues sur $[a,b[$,

si $\begin{cases} f(t) \sim_b g(t) \\ f \geqslant 0 \text{ au voisinage de } b \end{cases}$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature

EXEMPLE N° 3 Préciser la nature de 1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{2+t^3}\,dt$ 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3}\mathrm{d}t$ *(Comparer* $\ln t$ *et* t*)*

II-3) Intégration par parties

Si f et g sont des applications de classe C^1 sur $[a,b[$, on peut utiliser une IPP sur $[a,x]$ pour $x \in [a,b[$:

$$\int_a^x f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^x - \int_a^x f'(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Si $\lim\limits_{x\to b^-} \big[f(t)g(t)\big]_a^x$ existe alors les deux intégrales ont forcément la même nature. Dans le cas de la convergence, on obtient une formule d'intégration par parties sur $[a,b[$ en notant : $\big[f(t)g(t)\big]_a = \lim\limits_{x\to b^-} \big[f(t)g(t)\big]_a^x$

Théorème : Intégration par parties

Soient f et g des applications de classe C^1 sur $[a,b[$,

Si $\big[f(x)g(x)\big]_a^b = \lim\limits_{x\to b} \big[f(t)g(t)\big]_a^x$ existe dans $\mathbb{R}$ alors $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature.

S'il y a convergence, on a : $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$

La rédaction d'une intégration par parties doit être rigoureusement justifiée

- soit on justifie la convergence de $\big[f(t)g(t)\big]_a^b$ et de l'une des intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$

  puis on peut écrire l'égalité $\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$
- soit , lorsque $\big[f(t)g(t)\big]_a^b$ diverge, on commence par réaliser l'IPP sur le segment $[a,x]$ puis on fait tendre x vers b ensuite car il peut y avoir un phénomène de compensation type $+\infty - \infty$

On peut parfois utiliser une IPP avant d'avoir justifier la convergence de l'intégrale car, en justifiant la convergence du 2nd membre, on justifie alors, du même coup, la convergence de l'intégrale.

EXEMPLE N° 4 Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ et $\int_2^{+\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ à l'aide d'intégrations par parties

II-4) Changement de variables

Rappelons le théorème vu en PTSI pour les intégrales de fonctions continues sur un segment :

Théorème : changement de variable sur un segment

Si f est continue sur un intervalle I et si $\left[\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathrm{I}\right]$ est de classe C^1 alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Remarques

- En pratique, cela correspond à poser $t = \varphi(x)$ avec $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x$, $x\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.,\quad t\left|\begin{matrix}\varphi(\alpha)\\ \varphi(\beta)\end{matrix}\right.$
- Les hypothèses à vérifier sont « φ est C^1 sur $[\alpha,\beta]$ » et « f est C^0 sur $\left[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)\right]$ (ou $\left[\varphi(\beta),\varphi(\alpha)\right]$) »

Dans le cas d'un intervalle quelconque, il va falloir être plus exigeant sur φ :

Théorème : Changement de variables sur un intervalle quelconque

Soient f une fonction C^0 sur $]a,b[$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ de classe C^1 réalisant une bijection strictement croissante alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature et, si elles convergent, elles sont égales.

Remarques :

- Bien entendu, le résultat s'adapte si φ est strictement décroissante et, dans ce cas, on a :

- Là encore, on peut utiliser le théorème de changement de variables pour justifier une convergence d'intégrale sans avoir étudier la convergence de l'intégrale initiale auparavant.
- Un changement de variables peut transformer une intégrale généralisée en une intégrale sur un segment (et inversement)

Exemple de référence (Intégrale de Riemann en $a \in \mathbb{R}$) :

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixés et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_{a-\varepsilon}^{a} \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$

EXEMPLE N° 5 Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^8}\mathrm{d}x$

EXEMPLE N° 6 Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha \mathrm{d}x$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

III) Fonction intégrable ou intégrale absolument convergente sur un intervalle quelconque

III-1) Convergence absolue et intégrabilité

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ est soit le corps $\mathbb{R}$ soit le corps $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition : Fonction intégrable sur un intervalle ou intégrale absolument convergente

On dit qu'une fonction $[f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}]$ est intégrable sur I ou que l'intégrale $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si

$$f \text{ est } \mathrm{C}^0 \text{ sur I et si } \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge où } \begin{cases} a = \inf(\mathrm{I}) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ b = \sup(\mathrm{I}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

On utilise indifféremment les deux notions « f est intégrable sur I » et « $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente »

Lorsqu'on étudie la convergence absolue au voisinage d'une singularité b pour $\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$,
on dit qu'on étudie l'« intégrabilité de f au voisinage de b »

Théorème : Intégrabilité ou CVA ⇒ CV de l'intégrale

Si $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument / f est une fonction intégrable sur I

$$\text{alors } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge où } \begin{cases} a = \inf(\mathrm{I}) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ b = \sup(\mathrm{I}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : La notion d'intégrabilité pour les fonctions est analogue à la CVA pour les séries numériques.

Définition : Notation $\int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t$ ou $\int_{\mathrm{I}} f$

Si $[f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}]$ est une fonction intégrable sur I,

$$\text{on note } \int_{\mathrm{I}} f = \int_{\mathrm{I}} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ où } \begin{cases} a = \inf(\mathrm{I}) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ b = \sup(\mathrm{I}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$$

Fonctions intégrables de référence
Intégrale de Riemann *en* $+\infty$: $\left[t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right]$ est intégrable en $+\infty$ si $\alpha > 1$ *en* 0 : $\left[t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right]$ est intégrable en 0 si $\alpha < 1$ *en* $a \in \mathbb{R}$: $\left[t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}\right]$ est intégrable en a si $\alpha < 1$
Intégrale du logarithme et de l'exponentielle $[t \mapsto e^{-\alpha t}]$ est intégrable en $+\infty$ si $\alpha > 0$ $[t \mapsto \ln(t)]$ est intégrable en 0^+
Changement de variable affine f est intégrable en a^+ $\Leftrightarrow$ $[t \mapsto f(a+t)]$ est intégrable en 0^+ f est intégrable en b^- $\Leftrightarrow$ $[t \mapsto f(b-t)]$ est intégrable en 0^+

Attention! $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **peut exister sans que** f **soit intégrable sur** $]a;b[$

On dit alors que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est semi-convergente (elle converge sans converger absolument)

Exemple fondamental : $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ converge sans converger absolument}}$

autrement dit $\boxed{\left[f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}\right] \text{ n'est pas intégrable sur } [1, +\infty[}$

III-2) Les théorèmes de convergence absolue

Proposition : Espace vectoriel $\mathrm{L}_1(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et linéarité de l'intégrale

- L'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ forment un espace vectoriel.
  Plus précisément, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{K})$. On le note $\mathrm{L}_1(\mathrm{I},\mathbb{K})$

  Remarque : Si I est un segment de $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{L}_1(\mathrm{I},\mathbb{K}) =$

- L'application $\left[f \mapsto \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est une application linéaire de $\mathrm{L}_1(\mathrm{I},\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

Attention ! Ici, on peut utiliser la linéarité car toutes les intégrales convergent (absolument)

Proposition : Inégalité triangulaire

Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $\left|\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Proposition :

Si f est une fonction C^0 sur l'intervalle I alors $\int_{\mathrm{I}} |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est identiquement nulle sur I

Théorème de comparaisons :

Soient f et g des fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$,

- *(majoration)*
  Si $\begin{cases} |f| \leqslant |g| \text{ sur I} \\ g \text{ est intégrable sur I} \end{cases}$ alors f est intégrable sur I
- *(règle du o ou du* O*)*
  Si $\begin{cases} f(t) = o_b\big(g(t)\big) \\ g \text{ est intégrable sur } \mathrm{I} = [a,b[\end{cases}$ alors f est intégrable sur $[a,b[$

  Remarque : on peut aussi utiliser ce résultat avec l'hypothèse $f(t) = \mathrm{O}_b\big(g(t)\big)$ plutôt que $f(t) = o_b\big(g(t)\big)$
- *(critère d'équivalence)*
  Si $f(t) \sim_b g(t)$ alors f est intégrable sur $\mathrm{I} = [a,b[\Leftrightarrow g$ est intégrable sur $\mathrm{I} = [a,b[$

  Remarque : L'hypothèse « signe constant » est cachée dans la notion d'intégrabilité

RETOUR SUR LE 3) DE L'EXEMPLE 3 : Justifier avec une domination la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3}\,\mathrm{d}t$

EXEMPLE N° 7 Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)\ln(1+t)}{t^2\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$

III-3) Intégration terme à terme

Théorème : (intégration terme à terme)

Soit $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction telle qu'il existe des fonctions $f_n : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec $\forall t \in \mathrm{I},\ \mathrm{S}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$

Si $\left\{\begin{array}{l}\text{i) la fonction S est continue sur I}\\ \text{ii) toutes les fonctions } f_n \text{ sont intégrables sur I}\\ \text{iii) La série } \sum \int_{\mathrm{I}} \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t \text{ est convergente}\end{array}\right.$ alors S est intégrable sur I

et on a alors : $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t\right)$

Remarques :

- Sous réserve de ces hypothèses, on peut inverser l'ordre des symboles ce qui revient à « intégrer terme à terme » la série
- Attention, il ne suffit pas d'avoir la convergence des intégrales : il faut de la convergence absolue !
- Attention, il faut aussi vérifier la continuité de la somme S de la série !

EXEMPLE N° 8 Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} \mathrm{d}t$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Attention à toujours bien vérifier toutes les hypothèses !

EXEMPLE N° 9 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(t) = e^{-nt} - 2e^{-2nt}$ pour $t > 0$

Montrer que les deux expressions suivantes existent mais que leurs valeurs diffèrent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t\right) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t$$