CHAPITRE VI: RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES

I) *Éléments propres d'un endomorphisme*

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et f désigne un endomorphisme de E.

I-1) *Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres*

Définitions : Valeurs propres, vecteurs propres et spectre d'un endomorphisme

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur x de E non nul tel que $f(x) = \lambda x$.

autrement dit : $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f \Leftrightarrow \exists x \in E,\ x \neq 0_E \text{ et } f(x) = \lambda x}$

Le vecteur x est alors un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

autrement dit : $\boxed{x \in E \text{ est un vecteur propre de } f \Leftrightarrow x \neq 0_E \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K},\quad f(x) = \lambda x}$

On appelle alors spectre de l'endomorphisme f et on note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Remarques :

- un vecteur propre n'est jamais nul !
- Si x est un vecteur propre, la valeur propre λ associée à x est unique.

- Il n'y a pas unicité du vecteur propre associé à une valeur propre.
  En particulier, un vecteur non nul de $\mathrm{Vect}(x)$ est encore un vecteur propre de f pour la valeur propre λ

Géométriquement, les vecteurs propres sont les vecteurs de E tels que f laisse stable la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$.
En effet : $\boxed{\text{Pour } x \in E \text{ avec } x \neq 0_E,\qquad x \text{ est un vecteur propre de } f \Leftrightarrow \mathrm{Vect}(x) \text{ est stable par } f}$

Par ailleurs : $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow (f - \lambda id_E)(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E)$

Définition et théorème : Sous espace propre

Étant donné un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E,

$$\lambda \in \mathbb{K} \text{ est valeur propre de } f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f,
on appelle alors sous-espace propre de f associé à λ le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E)$

Remarques :

- $E_\lambda(f)$ est bien un sev puisque
- $E_\lambda(f)$ contient tous les vecteurs propres de f associés à λ avec, en plus, 0_E.
- Si λ n'est pas valeur propre de f, on peut quand même définie $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E) =$
- Si $\lambda = 0$ alors $E_0(f) =$ de sorte que : 0 est une valeur propre de $f \Leftrightarrow$

EXEMPLE N° 1 On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$
On définit l'application f qui à une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ associe $f(M) = AMB$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ et préciser ses valeurs propres et ses espaces propres.

EXEMPLE N° 3/2 Soit l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\begin{cases} v_0 = u_0 \\ \forall n \geqslant 1,\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{cases}$. Déterminer les éléments propres de f

I-2) Somme finie de sous-espaces propres

Propositions : Somme de sous-espace propres

- Deux sous-espace propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
  autrement dit : si $\lambda \neq \mu$, $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f) = \{0_E\}$
- Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.
  autrement dit : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres 2 à 2 distincte alors

Corollaire : famille finie de vecteurs propres

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre

II) Éléments propres en dimension finie et polynôme caractéristique

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et f désigne un endomorphisme de E.

II-1) Éléments propres en dimension finie et éléments propres d'une matrice carrée

Proposition :

Si E est de dimension finie, il y a au plus $\dim E$ valeurs propres distinctes pour $f \in \mathscr{L}(E)$
et le sous-espace propre $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\, id_E)$ associée à une valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ vérifie :
$$\leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant$$

Définitions : Éléments propres d'une matrice carrée

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les éléments propres de la matrice A comme les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A. Ainsi :

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A $\Leftrightarrow \exists X \in \mathbb{K}^n$, $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = \lambda X \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
- $X \in \mathbb{K}^n$ est vecteur propre de A $\Leftrightarrow X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $AX = \lambda X$
- $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ est l'espace propre de A associé à la valeur propre λ et on a : $\leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant$
- On note Sp(A) et on appelle spectre de la matrice A l'ensemble des valeurs propres de la matrice A

II-2) Polynôme caractéristique

Théorème et définition : Polynôme caractéristique

• Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $[x \mapsto \det(xI_n - A)]$ est une application polynômiale, unitaire de degré n

On appelle polynôme caractéristique de A, noté χ_A, le polynôme unitaire de degré n qui vaut $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

• Si E est un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ dans une base quelconque de E,
le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(X) = \det(Xid_E - f) = \det(XI_n - M) = \chi_M(x)$

Rappel : on peut calculer le déterminant de $Xid_E - f$ dans n'importe laquelle de ses matrices donc dans $XI_n - M$

λ est une valeur propre de f $\Leftrightarrow$ $\exists x \in E,\ x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$

Théorème : Caractérisation des valeurs propres en dimension finie

• Si E est un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ de matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ dans une base quelconque de E,
λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \lambda$ est une racine de $\chi_f \Leftrightarrow \lambda$ est une racine de χ_M

• Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, les valeurs propres de A sont les racines de $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$

SUITE EXEMPLE N° 1 Retrouver le spectre de f à l'aide du polynôme caractéristique.

II-3) Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé

Commençons par quelques rappels sur les polynômes vu dans le cours de PTSI :

Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et si $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$
a est une racine de P $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$
a est une racine de multiplicité k $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$
P est un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$ si

Définition : Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Si λ est une valeur propre de f (resp. de A),
l'ordre de multiplicité $m(\lambda)$ de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_A (resp $\chi_f = \chi_M$)

Théorème (important) : multiplicité et dimension de l'espace propre

Si λ est une valeur propre de f (resp. de A), alors

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(f) = \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id_E) \leqslant m(\lambda)$$
$$(\text{resp.}\quad 1 \leqslant \dim E_\lambda(A) = \dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \leqslant m(\lambda))$$

Corollaire : valeur propre simple

Si λ est une valeur propre simple de f (resp. de A), alors $\dim E_\lambda(f) = 1 = m(\lambda)$ (resp. $\dim E_\lambda(A) = 1 = m(\lambda)$)

EXEMPLE N° 2 Déterminer, suivant les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$,les valeurs propres et la multiplicité pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$

III) Endomorphismes et matrices diagonalisables

III-1) Définition et premiers exemples

Définition : Endomorphismes et matrices diagonalisables

- Un endomorphisme f d'un espace E est diagonalisable de dimension finie est diagonalisable
  -s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
  -s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de E
- Une matrice carrée A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ si elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable sur $\mathbb{K}^n$.

Dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ de diagonalisation, la matrice de f est de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ donc :

-
-
- le polynôme caractéristique est nécessairement scindé dans $M_n(\mathbb{K})$:

Conséquence : $\boxed{\textbf{Diagonaliser } f \textbf{ (ou A), c'est trouver une base de vecteurs propres.}}$

Attention ! Une matrice (ou un endomorphisme) n'est pas toujours diagonalisable !

Exemples d'endomorphismes non diagonalisables

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$\chi_A(X) =$ et $\chi_B(X) =$

Ainsi, $Sp(A) =$ de sorte que A n'est pas diagonalisable :

En effet : B n'est pas diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ car
mais : $Sp_{\mathbb{C}}(B) =$ aussi :

Une matrice réelle peut être diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ mais ne pas l'être dans $M_n(\mathbb{R})$

Exemples d'endomorphismes diagonalisables

Proposition : diagonalisation des projecteurs et des symétries

Les projecteurs et les symétries d'un espace de dimension finie sont diagonalisables.
Si $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur où $\dim E = n$, alors

$Sp(p) =$ et $\chi_p(x) =$

Si $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie où $\dim E = n$ alors

$Sp(s) =$ et $\chi_s(x) =$

III-2) Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation

Théorème : caractérisation de la diagonalisation par la somme directe des sev propres

f (resp. A) est diagonalisable $\Leftrightarrow$ la somme directe des sous-espaces propres de f (resp. A) vaut E (resp. $\mathbb{K}^n$)

$\Leftrightarrow$ la somme des dimensions des sous-espaces propres de E vaut $\dim \mathrm{E}$

Théorème : caractérisation de la diagonalisation par dimension des sev propres et multiplicités

f (resp. A) est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{le polynôme caractéristique est scindé dans } \mathbb{K}[X] \\ \text{la multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé} \end{cases}$

autrement :

$$f \text{ (resp. A) est diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_f \text{ (resp. } \chi_A) \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f) \text{ (resp. } \mathrm{Sp}(A)),\ m(\lambda) = \dim \mathrm{E}_\lambda(f) \text{ (resp. } \dim \mathrm{E}_\lambda(A)) \end{cases}$$

Corollaire : Une condition suffisante de diagonalisabilité

Si f (resp A) possède n valeurs propres distinctes alors f (resp A) est diagonalisable.
Remarque : Dans ce cas, χ_f (resp χ_A) est un polynôme scindé à racines simples.

Remarque : On disposera plus tard d'une autre condition suffisante de diagonalisabilité :

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable avec matrice de passage orthogonale

Méthode : Plan de diagonalisation

On considère l'endomorphisme f associé à la matrice A.

Sauf indication du sujet et cas particulier, pour répondre à la question :

- f est-il diagonalisable (resp. A est-elle diagonalisable ?)

  On détermine le polynôme caractéristique sous forme factorisée pour obtenir le spectre $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.

  – S'il n'est pas scindé, f (resp. A) n'est pas diagonalisable.

  – S'il est scindé (c'est le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on compare $m(\lambda)$ avec $\dim \mathrm{E}_\lambda(A)$, dimension du sev propre associé.
  uniquement pour les valeurs propres λ avec $m(\lambda) > 1$.
  Il n'est pas forcément nécessaire de déterminer une base de l'espace propre car :

  $$\dim \mathrm{E}_\lambda(A) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda id) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \text{ (théorème du rang)}$$

  soit il y a une valeur propre avec $m(\lambda) \neq \dim \mathrm{E}_\lambda(A)$ et f (resp. A) n'est pas diagonalisable.

  soit $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A),\ m(\lambda) = \dim \mathrm{E}_\lambda(A)$ et f (resp. A) est diagonalisable.

- diagonaliser f (resp. A) (autrement dit on sait déjà que f (resp A) est diagonalisable)

  – on recherche le polynôme caractéristique (qu'on peut parfois obtenir sans calcul de déterminant)

  – on recherche une base de chacun des espaces propres.
  Pour λ valeur propre, on examine la matrice $A - \lambda I_n$. Puisqu'on connaît $\dim \mathrm{E}_\lambda(A) = m(\lambda)$, il suffit :

  soit de chercher une famille libre de $m(\lambda)$ vecteurs de $\mathrm{E}_\lambda(A)$ (à l'aide des colonnes de $A - \lambda I_n$)

  soit de chercher une famille génératrice de $\mathrm{E}_\lambda(A)$ avec $m(\lambda)$ vecteurs (en résolvant le système $(A - \lambda I_n)X = 0_{n1}$)

  – on obtient une base $\mathscr{B}$ de vecteurs propres en réunissant les bases des différents espaces propres

  – on peut écrire :
  - la matrice diagonale D associée (attention à l'ordre des valeurs propres par rapport à l'ordre des vecteurs de $\mathscr{B}$)
  - la matrice de passage P entre la base initiale et la base $\mathscr{B}$:

  les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base initiale
  - la relation matricielle de changement de base : $D = P^{-1}AP$

SUITE EXEMPLE N° 2 Pour quelles valeurs du réel α, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

IV) *Endomorphisme et matrice trigonalisable*

Définition : endomorphisme et matrice trigonalisable

- Un endomorphisme f d'un espace E de dimension finie est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
- Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarques : Vu les définitions, il est trivial que :

- f est trigonalisable si sa matrice M dans une base quelconque de E est trigonalisable.
- A est une matrice trigonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable.

Théorème : (admis) CNS de trigonalisation

Un endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Une matrice A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caaractéristique est scindé

Corollaire :

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E de dimension finie est trigonalisable.
- Toute matrice M de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ autrement dit $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $P^{-1}MP = T$ triangulaire

Proposition : Trace, déterminant et valeurs propres

Si χ_f (resp χ_A) est un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$ alors

- $\det(f)$ est le produit des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité)
- $\mathrm{tr}(f)$ est la somme des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité)

En vertu du théorème fondamental de l'algèbre, χ_f (resp. χ_A) est nécessairement scindé sur $\mathbb{C}[X]$:

Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (valeur propre comptée avec multiplicité) alors $\det(f) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$

Ce résultat permet souvent de déterminer le spectre (et le polynôme caractéristique) sans calcul de déterminant.

EXEMPLE N° 3 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & n & \dots & n \\ n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 2$ est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?

Calculer le rang de la matrice $A + nI_n$

Il n'y a pas au programme de technique de trigonalisation à connaître.
Les exercices devront donc comporter des indications sauf peut être dans le cas $n = 2$.

$\boxed{\text{Étude du cas } n = 2}$

On considère une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ trigonalisable sans être diagonalisable.
On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ canoniquement associé à A
Nécessairement : $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda\}$
aussi : $\chi_{\mathrm{A}}(x) =$
et : $\dim \mathrm{E}_{\mathrm{A}}(\lambda) =$

Une base de trigonalisation est une base $\mathscr{B} = (u, v)$ de $\mathbb{K}^2$ avec : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) =$

Pour u, on doit donc choisir

Quitte à utiliser $u_1 = \alpha u$ plutôt que u comme premier vecteur de base, on aura : $\mathrm{Mat}_{(u_1,v)}(f) =$

$\boxed{\text{EXEMPLE N}^{\text{O}}\ 4}$ Réduire la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Exemple de trigonalisation guidée si } n = 3}$

$\boxed{\text{EXEMPLE N}^{\text{O}}\ 5}$ Montrer que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ est semblable à $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ où λ et μ sont des réels.

V) *Applications*

Il y a énormément d'applications de la réduction des endomorphismes mais nous allons, dans ce cours, nous limiter à deux applications classiques. Nous verrons aussi en exercice : la recherche des solutions d'équation matricielle, la résolution de systèmes différentiels linéaires et, plus tard, dans un autre cours, la réduction des coniques.

V-1) *Savoir si deux matrices sont semblables*

On considère deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ et on souhaite répondre à : Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Autrement dit, si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à A,
il s'agit de savoir s'il y a une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f est B.

Nous avons déjà examiné des conditions nécessaires liées à la similitude des matrices A et B : même trace, même déterminant...Le résultat suivant donne de nouvelles conditions nécessaires :

Proposition : éléments propres de matrices semblables

Deux matrices semblables ont
le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

De plus, les espaces propres respectifs associés à une même valeur propre sont de même dimension
(mais ne sont pas égaux!)

Ces nouvelles conditions nécessaires peuvent-elles nous conduire à une méthodologie permettant de répondre dans tous les cas sur la similitude de deux matrices?

Si la réduction des matrices A et B conduit à une même réduite R (R=matrice diagonale D ou triangulaire T), alors il s'agit d'une condition suffisante pour conclure à la similitude de A et B. En effet :

$$\begin{cases} \exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ P^{-1}AP = R \\ \exists Q \in GL_n(\mathbb{R}),\ Q^{-1}BQ = R \end{cases} \Rightarrow P^{-1}AP = Q^{-1}BQ \Rightarrow (PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1}) = B$$

Remarque : En réduisant effectivement (i.e. en explicitant P et Q), on peut déterminer une relation de similitude entre A et B.

Méthode : savoir si deux matrices sont semblables

On considère deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ et on note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A.

- on compare la trace des matrices A et B (et éventuellement sur indication, le déterminant ou le rang de $A+\lambda I_n$ et de $B+laI_n$ pour un λ donné) Si les valeurs sont différentes, on peut conclure que A et B ne sont pas semblables.
- on compare les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B
  S'ils sont distincts, on peut conclure que A et B ne sont pas semblables.
- on commence la réduction des matrices A et B :
  - si A et B sont diagonalisables en une matrice D (identique puisque $\chi_A = \chi_B$) alors, par transitivité de la relation d'équivalence, A et B sont semblables entre elles.
  - si l'une des matrices est diagonalisable et pas l'autre (càd il y a une valeur propre λ avec $\dim E_\lambda(A) \neq \dim E_\lambda(B)$) c'est contradictoire avec une relation de similitude entre A et B donc Aet B ne sont pas semblables
  - si A et B sont trigonalisables en une matrice T (avec éventuelles indications du sujet) alors, par transitivité de la relation d'équivalence, A et B sont semblables entre elles.

Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à la détermination de la matrice de passage sauf si le sujet demande d'expliciter la relation de similitude

EXEMPLE N° 6

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ? Si oui, expliciter la relation de similitude.

Même question avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

V-2) Calcul des puissances itérées d'une matrice diagonalisable

En PTSI, vous avez rencontré diverses méthodes pour calculer A^k lorsque A est une matrice(Voir le poly de rappel) :

- Utilisation d'une récurrence si on conjecture A^k sur le calcul des premières puissances
- Utilisation d'une décomposition $A = \lambda I_n + N$ où N est une matrice nilpotente puis formule du binôme
- Utilisation d'un polynôme annulateur (donné et de petit degré) ie P tel que $P(A) = O_{nn}$ en calculant le reste de la division de X^k par P : $\exists (Q_k, T_k) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad X^k = Q \times P + R \Rightarrow A^k = Q_k(A) \times O_{nn} + R_k(A) = R_k(A)$

Dans le cas d'une matrice diagonalisable, le calcul des puissances de A devient simple :

Méthode : Calcul des puissances itérées d'une matrice diagonalisable

Si A est diagonalisable alors A et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ sont semblables autrement dit :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, comme D est diagonale, $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$ et, par une récurrence triviale : $A^k = PD^kP^{-1}$

Application : Les suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{K}^p)^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n \quad$ avec $A \in M_p(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathbb{K}^p$ donnés ont pour expression : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 \quad$ ce qu'on obtient en calculant les puissances itérées de A

SUITE EXEMPLE N° 4

1. Calculer les puissances itérées de A où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ en utilisant une réduction de A

2. Retrouver le résultat en remarquant que $\chi_A(A) = 0$ et en utilisant une division euclidienne de X^n par χ_A

3. Déterminer alors les expressions du terme général de (u_n) et (v_n) lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases} \quad \text{avec} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$