Consigne : Travailler en classe inversée ce chapitre.

CONSEILS MÉTHODOLOGIQUES POUR TRAVAILLER EN CLASSE INVERSÉE

1. Munissez vous du poly, d'un papier, d'un crayon et de surligneurs. L'idée est d'accompagner votre lecture par l'écrit et par de la mise en évidence en couleurs des points importants.
2. Les exemples ont vocation à être chercher d'abord seul avant de consulter la correction.
3. N'hésitez pas à m'envoyer des questions par mail auxquelles j'essaierai de répondre le plus vite possible.
4. Je vous propose d'étaler le travail sur l'acquisition du cours en plusieurs séances

Séance n° 1 Introduction et début de I-1 (pages 2 à 4) *(Environ 1h30)*

Séance n° 2 Suite de la partie I-1 (fin de la page 5 à 6) *(Environ 1h30)*

Vous pouvez désormais vous entraînez sur l'exercice 1 si vous le souhaitez

Séance n° 3 Paragraphes I-2-a et I-2-b (pages 7 8 et 9) *(Environ 1h30)*

Vous pouvez désormais vous entraînez sur l'exercice 2 si vous le souhaitez

Séance n° 4 Paragraphes I-2-c (pages 10,11 et 12) *(Environ 2h)*

Vous pouvez désormais vous entraînez sur l'exercice 3,4, 5 et 6 si vous le souhaitez

Nous travaillerons uniquement les exercices à la rentrée sur des séances de TD.

Bon courage à tous !

CHAPITRE V: COMPLÉMENT SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tous le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ce chapitre va se découper en deux temps :

- Nous allons d'abord généraliser notre savoir-faire pour la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre (EDL1). En PTSI, vous avez appris à résoudre du type $y' + a(t)y = b(t)$ où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Nous allons apprendre à gérer des équations plus générale du type $\boxed{\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)}$ où α, β, γ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  $\boxed{\text{Lorsque } \alpha(t) \text{ ne s'annule pas sur I, on dit que l'EDL1 est résolue en } y'}$
  Quitte à diviser par $\alpha(t)$, le problème se ramène à celui vu en PTSI.
  Si $\alpha(t)$ s'annule, on va d'abord résoudre sur des sous-intervalles J inclus dans I où l'équation est résolue en y' puis on procédera à $\boxed{\text{un recollement de solutions}}$
- Dans un second temps, nous allons apprendre à mieux connaître les équations différentielles linéaires du second ordre (EDL2) du type $\boxed{a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)}$ où a, b, c et d sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  En PTSI, vous avez appris à résoudre les EDL2 à coefficients constants du type $ay'' + by' + cy = d(t)$ où a, b et c sont des scalaires pour certains types de second membre $d : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue sur I. Avec plus de recul sur l'algèbre linéaire, nous pourrons résoudre certaines EDL2 à coefficients non constants.

I) *Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2*

I-1) *Équations différentielles linéaire d'ordre 1 (Rappels et complément PTSI)*

La résolution des EDL1 est vu assez tôt en première année comme un outil calculatoire pour les autres disciplines. Vous n'avez pas, à ce moment là, de connaissances en algèbre linéaire suffisantes pour faire le lien entre les résultats et les notations d'algèbre. Ce recul étant désormais acquis, nous pouvons reformuler le résultat de PTSI :
- l'expression de la solution de $y' + a(t)y = 0$ sous la forme $y(t) = \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(t)}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{K}$ traduit que l'ensemble des solutions de $y' + a(t)y = 0$ est l'espace Vect(h) avec $\left[h : t \mapsto e^{-\mathrm{A}(t)}\right]$
- l'expression de la solution globale de $y' + a(t)y = b(t)$ sous la forme $y(t) = y_p(t) + \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(t)}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{K}$ où y_p est une solution particulière traduit que l'ensemble des solutions est de la forme $y_p + \mathrm{Vect}(h)$ (Par analogie avec la notation de la géométrie où on note $\mathscr{D} = \mathrm{A} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ la droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$)

Théorème : Ensembles des solutions de (E) : $y' + a(t)y = b(t)$ **où** $a, b : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ **sont** C^0 **sur l'intervalle** I

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à résoudre sur l'intervalle I
$$(\mathrm{E}) : y' + a(t)y = b(t) \quad \text{où } a, b : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K} \text{ sont } \mathrm{C}^0 \text{ sur l'intervalle I}$$

- L'ensemble $\mathscr{S}_\mathrm{H}$ des solutions homogènes i.e. des solutions de l'équation (H) : $y' + a(t)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ de dimension 1 engendré par $\left[h : t \mapsto e^{-\mathrm{A}(t)}\right]$ où A est une primitive de a sur I :
$$\mathscr{S}_\mathrm{H} = \left\{\mathrm{C}h \mid \mathrm{C} \in \mathbb{K}\right\} = \mathrm{Vect}(h) \text{ dans } \mathrm{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \text{ avec } h(t) = e^{-\mathrm{A}(t)} \text{ et A une primitive de } a \text{ sur I}$$
- L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est
$$\mathscr{S} = \left\{y_p + \mathrm{C}h \mid \mathrm{C} \in \mathbb{K}\right\} = y_p + \mathrm{Vect}(h) \qquad \text{où } y_p \text{ est une solution particulière de (E).}$$
  Une solution de (E) est la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène.
- Pour $(t_0, y_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} (\mathrm{E}) : y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ possède une unique solution.

Mise en garde et commentaires :

- Pour appliquer ce résultat, l'équation doit absolument être résolue en y' et écrite sous la forme $y' + a(t)y = b(t)$
- La résolution de l'équation homogène consiste finalement à trouver une primitive A de a
- Pour la recherche de la solution particulière y_p, on dispose de la méthode de la variation de la constante qui nous assure de trouver une solution ...d'un point de vu théorique parce qu'en pratique la recherche de primitive complique les choses. Dans cette méthode, on cherche la solution sous la forme $y_p(t) = \mathrm{C}(t)h(t)$ où h est une solution homogène et où la « constante » C devient $\mathrm{C}(t)$ variant avec t. On commence donc, en général, par résoudre l'équation homogène pour identifier h afin de pouvoir éventuellement poursuivre sur une méthode de variation de la constante.
- Un passage par la méthode de variation de la constante n'est en aucun cas obligatoire : on peut parfois repérer des solutions particulières simples et, dans ce cas, on gagne beaucoup de temps ! Il est courant par exemple de chercher des solutions constantes car on sait qu'il va y avoir une solution de ce type (l'équation est issue d'un système physico-chimique qui atteint un régime permanent au bout d'un temps long et où plus rien ne bouge...). Parfois, le sujet nous dit de chercher une solution d'un certain type (solution polynomiale ou du type $[t \mapsto e^{\alpha t}]$ par exemple) et il faut exploiter habilement ces indications. Le principe de superposition des solutions peut aussi être exploiter.

Dans les exemples que je vais traiter, *les parties en italiques* sont des commentaires soulignant la méthodologie mais n'ont pas forcément vocation à apparaître dans la rédaction.

EXEMPLE 1 On considère l'équation différentielle (E) : $|t|y' - y = t^2$
Résoudre (E) sur un intervalle J inclus dans $\mathbb{R}^*$

1°/ On vérifie le caractère résolue de l'équation et on ré-écrit l'équation pour appliquer le cours

Sur l'intervalle $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}^*$, $|t| \neq 0$ donc (E) est résolue en y' et on a : (E) $\Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{|t|}y = \dfrac{t^2}{|t|}$

Si J est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$ alors soit il est totalement inclus dans $]0, +\infty[$ soit il est totalement inclus dans $]-\infty, 0[$ ce qui nous amène à distinguer deux cas. *Ici, la distinction de cas facilite grandement la recherche de la primitive mais il peut arriver que cette distinction ne soit pas utile (voir exemple 2). De manière générale, pensez à organiser votre rédaction en précisant les étapes clés*

$\boxed{\text{1er cas : } \mathrm{J} \subset]-\infty, 0[}$ alors (E) $\Leftrightarrow y' + \dfrac{1}{t}y = -t$ Une primitive de $a(t) = \dfrac{1}{t}$ est $\mathrm{A}(t) = \ln|t|$

Attention à ne pas oublier la valeur absolue !

- Solutions homogènes : L'expression des solutions homogènes est $y(t) = \mathrm{C}e^{-\ln|t|} = \dfrac{\mathrm{C}}{|t|} = \dfrac{(-\mathrm{C})}{t}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$

Attention à ne pas faire n'importe quoi logarithmes/exponentielle : $e^{-\ln|t|} \neq -|t| < 0$ *! mais* $e^{-\ln|t|} = \dfrac{1}{e^{\ln|t|}} = \dfrac{1}{|t|}$

Autrement dit, l'ensemble des solutions homogènes est $\mathscr{S}_h = \mathrm{Vect}(h)$ où $h(t) = \dfrac{1}{t}$

On "simplifie" au maximum l'expression de $h(t)$ *: on peut, en général, faire disparaître les valeurs absolues en faisant porter le signe sur la constante :* $y(t) = \dfrac{-\mathrm{C}}{t}$ *où* $\mathrm{C} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(t) = \dfrac{\mathrm{K}}{t}$ *où* $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$

- Solution particulière : On la cherche par variation de la constante sous la forme

$$y_p(t) = \mathrm{C}(t)h(t) \quad \text{avec C de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur J et } h \text{ une solution homogène soit } h(t) = \frac{1}{t}$$

Il est souhaitable de signaler la méthode de variation de la constante et, quitte à choisir une solution homogène, utilisons une constante simple (ici $\mathrm{K} = 1$*)*

$$y_p'(t) + \frac{1}{t}y_p(t) = -t \Leftrightarrow \mathrm{C}'(t)h(t) + \mathrm{C}(t)\underbrace{\left(h'(t) + \frac{1}{t}h(t)\right)}_{=0} = -t \Leftrightarrow \frac{1}{t} \times \mathrm{C}'(t) = -t \Leftrightarrow \mathrm{C}'(t) = \frac{-t}{\frac{1}{t}} = -t^2$$

En aucun cas, vous n'avez à re-dériver h dans la variation de la constante : la partie $h'(t)$ *va disparaître ! On substitue* $h(t)$ *seulement à la fin pour déterminer la primitive* $\mathrm{C}(t)$

Aussi : $\mathrm{C}(t) = -\dfrac{t^3}{3}$ convient soit $y_p(t) = \mathrm{C}(t)h(t) = -\dfrac{t^2}{3}$

- Les solutions de (E) sur $\mathrm{J} \subset]-\infty, 0[$ forment $\boxed{\mathscr{S}_\mathrm{J} = y_p + \mathrm{Vect}(h)}$ et sont $\boxed{\text{d'expression } \quad y(t) = -\dfrac{t^2}{3} + \dfrac{\mathrm{C}}{t} \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R}}$

Attention à la rédaction ! *On a* $C'(t) = -t^2 \Leftrightarrow C(t) = -\dfrac{t^3}{3} + k$ *où* $k \in \mathbb{R}$ *et l'équivalence est fausse sans cette constante* k *d'intégration. C'est pourquoi je fais le choix de ne pas écrire d'équivalence mais un « aussi » en choisissant seulement une primitive de* $C(t)$ *de* $C'(t)$ *car je n'ai besoin que d'une solution particulière.*
Attention à l'oubli classique! La solution particulière est $y_p(t) = C(t) \times h(t)$ *Il ne faut pas oublier de re-multiplier par* $h(t)$ *!*
Attention au sens de ce que vous écrivez ! Une solution de (E) *est une fonction* $[t \mapsto y(t)]$ *qui forme un ensemble de solution* $\mathscr{S}$ *et* $y(t)$ *est l'expression de cette solution.*

$\boxed{\text{2nd cas : } J \subset]0, +\infty[}$ alors (E) $\Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{t}y = t$ Une primitive de $a(t) = -\dfrac{1}{t}$ est $A(t) = -\ln t$

Cette fois, $t > 0$ *donc* $|t| = t$ *!*

- Solutions homogènes : Les solutions homogènes sont de la forme $y(t) = Ch(t)$ où $h(t) = e^{\ln t} = t$.
- Solution particulière :On remarque que $[t \mapsto t^2]$ est solution particulière puisque $2t - \dfrac{1}{t} \times t^2 = t$

Cette vérification calculatoire de la solution particulière doit apparaître sur la copie. À l'écrit, rien ne vous interdit de faire votre variation de la constante au brouillon (sans avoir à la rédiger) pour ensuite « remarquer » une solution particulière sur votre copie en vérifiant qu'elle en est bien une...Le correcteur n'est pas dupe et se doute que vous avez fait une variation de la constante au brouillon mais, si votre solution est juste, c'est que vous l'avez bien faite alors...

- L'ensemble des solutions de (E) sur J est $\mathscr{S}_J = y_p + \mathrm{Vect}(h)$ et $\boxed{\text{les solutions vérifient } y(t) = Ct + t^2 \text{ où } C \in \mathbb{R}}$

EXEMPLE 2 On considère l'équation différentielle (E) : $xy' - y = 1 + x^2 \cos x$

Résoudre (E) sur un intervalle J inclus dans $\mathbb{R}^*$

Sur J inclus dans $\mathbb{R}^*$, $x \neq 0$ et donc : (E) $\Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x} + x\cos x$

- Solutions homogènes : On a $a(x) = -\dfrac{1}{x} = A'(x)$ avec $A(x) = -\ln|x|$ et les solutions homogènes ont pour expression $Ce^{\ln|x|} = C|x|$ Or, $|x|$ gardera un signe constant sur J *(J est soit inclus dans* $]0, +\infty[$ *et* $|x| = x$*, soit inclus dans* $]-\infty, 0[$ *et* $|x| = -x$*)* donc, quitte à faire porter le signe par la constante, l'ensemble des solutions homogène est $\mathrm{Vect}(h)$ avec $h(x) = x$
- Solution particulière : On utilise le principe de superposition des solutions :

- La fonction $[y_1 : x \mapsto -1]$ est trivialement une solution de $xy' - y = 1$
- On recherche une solution de $xy' - y = x^2 \cos x$ par variation de la constante sous la forme

$$y_2(x) = C(x)h(x) \quad \text{avec } h(x) = x \text{ et C dérivable sur I}$$

$$xy_2'(x) - y_2(x) = x^2\cos x \Leftrightarrow xC'(x)h(x) + \underbrace{C(x)\big(xh'(x) - h(x)\big)}_{=0} = x^2\cos x \Leftrightarrow x^2C'(x) = x^2\cos x \Leftrightarrow C'(x) = \cos x$$

de sorte que $C(x) = \sin x$ convient et $y_2(x) = C(x)h(x) = x\sin x$

Attention à ne pas mélanger les deux formes de l'équation sur le 2nd membre. On peut aussi partir de la forme réduite mais il faut utiliser alors le 2nd membre réduit :

$$y_2'(x) - \tfrac{1}{x}y_2(x) = x\cos x \Leftrightarrow C'(x)h(x) + \underbrace{C(x)\Big(h'(x) - \frac{1}{x}h(x)\Big)}_{=0} = x\cos x \Leftrightarrow xC'(x) = x\cos x \Leftrightarrow C'(x) = \cos x$$

L'expression d'une solution de $xy' - y = x^2\cos x$ sur $J \subset \mathbb{R}^*$ est donc $y_2(x) = x\sin x + Cx$ où $C \in \mathbb{R}$

- Finalement, $\boxed{\text{l'expression d'une solution de (E) sur } J \subset \mathbb{R}^* \text{ est donc } y(x) = -1 + x\sin x + Cx \text{ où } C \in \mathbb{R}}$

Maintenant que nous savons résoudre l'équation lorsqu'elle est résolue en y', on peut s'attaquer à la résolution d'équation non résolue en y' à l'aide de « recollement de solutions » ici en 0 des solutions. L'idée est qu' on connaît l'expression d'une solution avant et après 0 avec, à chaque fois, une constante indéterminée. La constante sur $]-\infty,0[$ n'a aucune raison d'être la même que sur $]0,+\infty[$. L'idée est de voir si on peut réunir ces expressions pour obtenir une expression sur $\mathbb{R}$, mais attention, il faut respecter un recollement continue et dérivable en 0 puisqu' une solution de l'équation sur (E) sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

SUITE EXEMPLE N° 1 Résoudre l'équation (E) : $|t|y' - y = t^2$ sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$, l'équation n'est plus résolue en y' car t s'annule en 0. On connaît l'expression des solutions sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ aussi on peut procéder à un recollement de solutions en 0.

• Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors

- c'est aussi une solution sur $]-\infty,0[$ et donc : $\exists \mathrm{C}\in\mathbb{R}, \forall t<0,\ y(t) = -\dfrac{t^2}{3} + \dfrac{\mathrm{C}}{t}$
- c'est aussi une solution sur $]0,+\infty[$ et donc : $\exists \mathrm{K}\in\mathbb{R}, \forall t>0,\ y(t) = t^2 + \mathrm{K}t$
- en $t=0$ l'équation donne $-y(0) = 0 \Leftrightarrow y(0) = 0$
- la solution y doit être continue en 0 autrement dit $\lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = y(0) = \lim\limits_{t\to 0^+} y(t)$

  Ici, cela impose $\mathrm{C}=0$ (sinon $y(t) = -\dfrac{t^2}{3} + \dfrac{\mathrm{C}}{t} \xrightarrow[t\to 0^-]{} \pm\infty$) mais il n'y a aucune condition à imposer sur K
- la solution y doit être dérivable en 0

  Le théorème de la limite d'une dérivée impose que $y'(0) = 0$ puisque $\lim\limits_{t\to 0^-} y'(t) = \lim\limits_{t\to 0^-}\left(-\dfrac{2}{3}t\right) = 0$

  Rappel : si f est continue sur $]-\infty,a]$ et dérivable sur $]-\infty,a]$ avec $\lim\limits_{t\to a} f'(t) = \ell\in\mathbb{R}$ alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$

  Mais, en appliquant le théorème sur $[0,+\infty[$, on a aussi $y'(0) = \lim\limits_{t\to 0^+}(2t+\mathrm{K}) = \mathrm{K}$. Ainsi, $\mathrm{K}=0$

  On peut aussi utiliser des limites de taux d'accroissement :

  $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{-\frac{t^2}{3}-0}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-}\left(-\dfrac{t}{3}\right) = 0$ d'une part, $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t^2+\mathrm{K}t-0}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-}(2t+\mathrm{K}) = 0$ d'autre part

  • Finalement, il n'y a qu'une fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ d'expression $y(t) = \begin{cases} -\frac{t^2}{3} & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t=0 \\ t^2 & \text{si } t>0 \end{cases}$

Le raisonnement mené est un raisonnement par Analyse/Synthèse. Ici, il a fallu aller au bout de l'analyse (premier point) mais, parfois, on déterminer toute les constantes uniquement par la continuité. Il n'est alors par nécessaire d'aller au bout de l'analyse et on vérifie dans la synthèse (le second point) que la fonction trouvée est bien dérivable. Attention, toutes les situations sont possibles : l'analyse peut n'amener aucune condition sur les constantes même mener à son terme ou bien elle peut montrer qu'il n'y a pas de solution possible...

Méthode : Plan de résolution de (E) : $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ **où** $\alpha,\beta,\gamma : \mathrm{I}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ **sont** C^0 **sur l'intervalle** I

1. On transforme l'équation différentielle sous une forme résolue $y' + a(t)y = b(t)$ quitte à résoudre sur $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$
   Pour cela, on commence donc par résoudre sur les intervalles $\mathrm{J}\subset\mathrm{I}$ où α ne s'annule pas.
2. On résout l'équation homogène $y' + a(t)y = 0$ (H) sur chacun des intervalles J
   Les solutions homogènes sont de la forme Ch où $C\in\mathbb{K}$ et $h(t) = e^{-A(t)}$ avec A primitive de a sur J.
   On simplifie au maximum l'expression des solutions : on fait, en particulier, disparaître les valeurs absolues quitte à faire porter le signe sur la constante (la quantité en valeur absolue garde un signe constant sur J)
3. On cherche une solution particulière y_p sur J
   Quitte à utiliser **le principe de superposition** des solutions, on cherche une solution analogue au 2nd membre. S'il n'y a pas de solution évidente, on utilise **la méthode de variation de la constante** : on recherche
   y sous la forme $y(t) = C(t)h(t)$ où h est une solution homogène (qui ne s'annule pas) et C est dérivable sur J
   $$\text{Sur J} : y' + a(t)y = b(t) \Leftrightarrow C'(t)h(t) + \underbrace{C(t)h'(t) + a(t)C(t)h(t)}_{=C(t)\times 0} = b(t) \Leftrightarrow C'(t) = \frac{b(t)}{h(t)}$$
   Il suffit de choisir **une** primitive pour C pour obtenir une solution particulière y_p avec : $y_p(x) = C(x)\times h(x)$.
4. On exprime l'ensemble des solutions sur J : $\mathscr{S}(\mathrm{J}) = \{y_p + Ch \mid C\in\mathbb{K}\}$
5. On étudie le recollement continue et dérivable des solutions aux points de I où α s'annule
   Il s'agit d'un raisonnement en analyse/synthèse où on peut raisonner avec un DL1 ou avec un raisonnement pas à pas (limite à gauche et à droite de f et d'un taux d'accroissement)
6. Dans le cas d'un problème de Cauchy, on utilise les conditions initiales pour fixer la constante.

SUITE EXEMPLE N° 2 Résoudre l'équation (E) : $xy' - y = 1 + x^2\cos x$ sur $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$, l'équation n'est plus résolue en y' car x s'annule en 0. On connaît l'expression des solutions sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ aussi on peut procéder à un recollement de solutions en 0.

• Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors

- c'est aussi une solution sur $]-\infty,0[$ et donc : $\exists C\in\mathbb{R}, \forall x<0,\ y(x) = -1 + x\sin x + Cx$
- c'est aussi une solution sur $]0,+\infty[$ et donc : $\exists K\in\mathbb{R}, \forall x>0,\ y(x) = -1 + x\sin x + Kx$
- en $x = 0$ l'équation donne $-y(0) = 1 \Leftrightarrow y(0) = -1$
- la solution y doit être dérivable en 0 donc elle doit posséder en 0 un DL1
  Rappel : f admet un DL1 en $a \Leftrightarrow f$ est dérivable en a et le DL est alors : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$
  Les DL1 obtenu pour $x<0$ et pour $x>0$ doivent être les mêmes par unicité du DL :
  Puisque $x\sin x = o(x)$, on a $-1 + Cx + o(x) = -1 + Kx + o(x) \Rightarrow C = K = y'(0)$
  Lorsque l'expression s'y prête, le DL est un outil très performant qui exploite en même temps la continuité et la dérivabilité.

• Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions $[y : x\in\mathbb{R}\mapsto -1 + x\sin x + Cx]$ où $C\in\mathbb{R}$ *Pas besoin de distinguer des cas car l'expression est la même que $x<0, x>0$ et marche aussi pour $x=0$*

Attention ! Le résultat sur les DL n'est vrai qu' à l'ordre 1 : et il est faux de croire que, si f admet un DL2, alors f est 2 fois dérivable. Le contre-exemple classique est : $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3\sin\frac{1}{x} = 1 + x + x^2 + o(x)$ donc qui admet un DL mais dont la dérivée d'expression $f'(x) = 1 + 2x + 2x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f'(0) = 1$ n'est pas dérivable en 0 puisque le taux d'accroissement $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 2 + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite.

I-2) Équations différentielles linéaire d'ordre 2

I-2-a) Structure des ensembles solutions

Tout d'abord, le caractère linéaire de l'équation induit une structure affine de l'ensemble des solutions qu'on résume dans le théorème suivant :

Théorème : Ensembles des solutions de (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ **où** $a, b, c : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ C^0 **sur l'intervalle** I

On considère une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2 à résoudre sur l'intervalle I

(E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ où $a, b, c : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ sont C^0 sur l'intervalle I

- **Théorème de Cauchy linéaire** (ADMIS) Pour $(t_0, y_0, y_1) \in \mathrm{I} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$,

 le problème de Cauchy $\begin{cases} (\mathrm{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$ possède une unique solution.

- L'ensemble $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ des solutions homogènes i.e. des solutions de l'équation (H) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ de dimension 2.

 $\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$ dans $\mathrm{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ où h_1 et h_2 sont deux solutions homogènes non colinéaires

- L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est

 $\mathscr{S} = \left\{ y_p + \mathrm{C}_1 h_1 + \mathrm{C}_2 h_2 \mid (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{R} \right\} = y_p + \mathrm{Vect}(h_, h_2)$ où y_p est une solution particulière de (E).

 Une solution de (E) est la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène.

• Le théorème de Cauchy-linéaire est admis.

• Tout d'abord, on vérifie que $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ est un sev de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ car :

- $\mathscr{S}_{\mathrm{H}} \subset \mathrm{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ puisque, si $y \in \mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ alors y est 2 fois dérivables sur I donc y et y' sont C^0 sur I puis $y'' = c - ay' - by$ est C^0 sur I par produit et CL de fonctions continues sur I donc y est bien C^2 sur I.

- $\mathscr{S}_{\mathrm{H}} \neq \emptyset$ puisque $[t \mapsto 0] \in \mathscr{S}_{\mathrm{H}}$

- $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ est stable par combinaison linéaire : si y_1 et y_2 sont deux solutions homogènes et $\alpha \in \mathbb{K}$ alors

$(\alpha y_1 + y_2)'' + a(t)(\alpha y_1 + y_2)' + b(t)(\alpha y_1 + y_2) = \alpha\left(y_1'' + a(t)y_1' + b(t)y_1\right) + y_2'' + a(t)y_2' + b(t)y_2 = \alpha \times 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha y_1 + y_2 \in \mathscr{S}_{\mathrm{H}}$

• On considère alors l'application $\left[f : y \mapsto \left(y(0), y'(0)\right) \right]$ et on vérifie trivialement que $f \in \mathscr{L}\left(\mathscr{S}_{\mathrm{H}}, \mathbb{K}^2\right)$

Le théorème de Cauchy linéaire qu'on a admis assure la bijectivité de f aussi f est un isomorphisme et

$\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ et $\mathbb{K}^2$ sont isomorphes et donc $\dim \mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \dim \mathbb{K}^2 = 2$

Si h_1 et h_2 sont 2 solutions homogènes non colinéaires alors (h_1, h_2) sera une base de $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ d'où $\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$

• Enfin, l'inclusion $\left\{ y_p + \mathrm{C}_1 h_1 + \mathrm{C}_2 h_2 \mid (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathscr{S}$ est triviale par linéarité. En outre, si $y \in \mathscr{S}$ alors on vérifie facilement que $y - y_p \in \mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \mathrm{Vect}(h_1, h_1)$ d'où l'inclusion $\mathscr{S} \subset \left\{ y_p + \mathrm{C}_1 h_1 + \mathrm{C}_2 h_2 \mid (\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathbb{R} \right\}$

Attention ! Le théorème précédent s'applique dans le cas d'une EDL2 résolue en y''.

Méthode : Résolution de (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ **où** $a, b, c : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ **sont** C^0 **sur l'intervalle** I

Si on a identifié une équation différentielle linéaire du second ordre résolue en y'' alors

on sait que l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = y_p + \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$

où y_p est une solution particulière et h_1 et h_2 sont deux solutions homogènes non colinéaires.

En particulier, si l'équation est homogène, l'ensemble des solutions est réduit à $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$

Dans le cas d'une équation (E) : $\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t)$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ sont C^0 sur I
il convient donc de résoudre sur un intervalle $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ où α ne s'annule pas puis d'étudier d'éventuels recollements de solutions (qui sont cette fois C^0 et deux fois dérivables donc une étape supplémentaire dans l'analyse).

Les équations différentielles du second ordre à coefficients constants sont un cas particulier de ce type d'équation. Le résultat de PTSI utilisant l'équation caractéristique pour une équation $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b, c sont des constantes permet de trouver les fonctions h_1 et h_2 (voir la section I-2-b) et la fonction y_p en utilisant des règles suivant la forme du second membre.

Attention ! Pas d'équation caractéristique lorsque les coefficients ne sont pas constants

Dans le cas général, la recherche de y_p, h_1 et h_2 est guidée par le sujet qui vous propose de rechercher des solutions sous une forme particulière :

- « évidente » (une constante ou $[t \mapsto t]$ ou $[t \mapsto e^t]$, etc...
- du type $[t \mapsto e^{\alpha t}]$ ou $[t \mapsto t^\alpha]$ qu'on injecte dans l'équation pour déterminer α
- du type polynomiale où on commence par chercher une condition sur le degré puis qu'on détermine par une méthode de coefficients indéterminés une fois le degré connu
- du type développable en série entière (à découvrir dans le chapitre Série entière)

EXEMPLE 3 On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 4xy' + 6y = 6$

1. Déterminer une solution particulière de (E) évidente.

On remarque que $[x \mapsto 1]$ est une solution triviale de (E) puisque : $x^2 \times 0 - 4x \times 0 + 6 \times 1 = 6$

2. Déterminer les solutions polynômiales de l'équation homogène associée à (E)

C'est un exercice classique vu l'an dernier dans le chapitre polynôme ! On commence par rechercher le degré d'une solution éventuellement à l'aide du coefficient dominant.

Si P est un polynôme vérifiant $X^2P'' - 4XP' + 6P = 0$ alors soit $P = 0$ soit $P \neq 0$.

Si $P \neq 0$, notons $n = \deg P \in \mathbb{N}$ et $a \neq 0$ le coefficient dominant de sorte que $P = aX^n + R$ avec $\deg R < n$

$$X^2P'' - 4XP' + 6P = 0 \Leftrightarrow X^2\big(n(n-1)aX^{n-2} + R''\big) - 4X\big(naX^{n-1} + R'\big) + 6(aX^n + R) = 0$$
$$\Leftrightarrow \big(n(n-1)a - 4na + 6a\big)X^n + X^2R'' - 4XR' + 6R = 0$$

Or : $\deg\big(X^2R'' - 4XR' + 6R\big) \leqslant \max\Big(\deg(X^2R''), \deg(4XR'), \deg(6R)\Big) \leqslant \max\Big(2 + \big(\deg R - 2\big), 1 + \big(\deg(R) - 1\big), \deg(R)\Big) < n$

donc la nullité du coefficient d'ordre n impose : $n(n-1)a - 4na + 6a = 0 \Leftrightarrow (n^2 - 5n + 6) = 0$ car $a \neq 0$

Or : $n^2 - 5n + 6 = (n-3)(n-2)$ aussi les polynômes non nul solutions de (E) sont de degré 2 ou 3

On cherche ensuite les polynômes solutions par une méthode de coefficients indéterminés où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$:

$P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ et $P'' = 6aX + 2b$

$X^2P'' - 4XP' + 6P = 0 \Leftrightarrow (6a - 12a + 6a)X^3 + (2b - 8b + 6b)X^2 + (-4c + 6c)X + 6d = 0 \Leftrightarrow c = d = 0$

Les solutions polynômiales de (E) forment le sev $\mathrm{Vect}(X^3, X^2) = \{aX^3 + bX^2 \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

• La théorie s'applique sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ où l'équation est résolue en y''

- Sur ces intervalles, l'ensemble des solutions homogènes de cette EDL2 est un sev de dimension 2 or on connaît déjà 2 solutions homogènes non colinéaires $h_1 = [x \mapsto x^2]$ et $h_2 = [x \mapsto x^2]$ aussi, l'ensemble des solutions homogènes sur $I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$ est $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^I$
- On connaît une solution particulière $y_p = [x \mapsto 1]$ sur $\mathbb{R}$
- Les solutions sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ forment l'ensemble $y_p + \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$
  Elles sont d'expression : $y(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

• On fait un recollement à l'ordre 2 des solutions en 0.

- si y est solution sur $\mathbb{R}$ alors : $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, y(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ cx^3 + dx^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et $y(0) = 1$ (avec $x = 0$ dans (E))

y doit être deux fois dérivable en 0 (ie y est C^1 et y' dérivable en 0). Or : $y'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2bx & \text{si } x < 0 \\ 3cx^2 + 2dx & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La continuité de y et y' est claire avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ sans condition à imposer aux constantes a, b, c et d.

(Les limites à droites et à gauche de $y(x)$ et $y'(x)$ coïncident aux valeurs respectives $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

La dérivabilité de y' en 0 entraîne qu'elle y admet un DL_1 : $y'(x) = \begin{cases} 2bx + o(x) & \text{si } x < 0 \\ 2dx + o(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ *(ici $3ax^2 = o(x)$ et $3cx^2 = o(x)$)* . L'unicité du DL entraîne donc : $2b = 2d \Leftrightarrow b = d$

- Finalement, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ ont pour expression $y(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ cx^3 + bx^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

En cas de recollement à l'ordre 2, on peut travailler pas à pas (continuité, dérivabilité puis dérivabilité seconde) ou bien envisager une approche plus globale avec l'utilisation de développements limités. En effet, y est deux fois dérivable si et seulement si y est de classe C^1 et y' est dérivable (donc admet un DL à l'ordre 1).

I-2-b) Équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (Rappels PTSI)

Les résultats de PTSI sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants peuvent être reformulé avec les notations de l'algèbre linéaire et donne, à chaque fois, une base (h_1, h_2) de l'ensemble des solutions homogènes.

Théorème : Solutions de (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ **avec** $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$

On commence par résoudre l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$

– $\boxed{\text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}}$: il y a 3 cas possibles

$\Delta > 0$ (2 racines réelles distinctes), $\Delta = 0$ (une racine réelle double) ou $\Delta < 0$ (2 racines complexes conjuguées)

Cas $\Delta > 0$: $\mathscr{S}_H = \text{Vect}(h_1, h_2) = \left\{[t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}] \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$

avec $h_i(t) = e^{r_i t}$ où r_1 et r_2 sont les deux racines distinctes.

Cas $\Delta = 0$: $\mathscr{S}_H = \text{Vect}(h_1, h_2) = \left\{[t \mapsto (At + B)e^{rt}] \mid (A, B) \in \mathbb{R}\right\}$

avec $h_1(t) = te^{rt}$ et $h_2(t) = e^{rt}$ où r est la racine double.

Cas $\Delta < 0$: $\mathscr{S}_H = \text{Vect}(h_1, h_2) = \left\{[t \mapsto e^{rt}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))] \mid (A, B) \in \mathbb{R}\right\}$

avec $h_1(t) = e^{rt}\cos(\omega t)$ et $h_2(t) = e^{rt}\sin(\omega t)$ où $r \pm i\omega$ sont les racines complexes conjuguées.

– $\boxed{\text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$: il y a 2 cas possibles $\Delta \neq 0$ (2 racines distinctes) ou $\Delta = 0$ (une racine double).

Le cas $\Delta \neq 0$ se traite comme le cas $\Delta > 0$ du point précédent avec les constantes $(A, B) \in \mathbb{C}^2$

Le cas $\Delta = 0$ se traite comme le cas $\Delta = 0$ du point précédent avec les constantes $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

On rappelle également qu'on dispose de règles permettant de rechercher une solution particulière de l'équation suivant la forme du second membre. Ces règles pouvant bien sûr être couplées au principe de superposition des solutions qui restent applicables.

Méthode : Forme d'une solution particulière de (E) : $ay'' + by' + cy = d(t)$ **avec** $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$

On note $(*) : ay'' + by' + cy = 0$ l'équation caractéristique associée.

– $\boxed{\text{si } d(t) = Ce^{mt} \text{ où } C \in \mathbb{R}}$ alors

si m n'est pas racine de l'équation $(*)$, on recherche y_p sous la forme $y_p(t) = ke^{mt}$ avec $k \in \mathbb{K}$ à déterminer

si m est racine simple de l'équation $(*)$, on recherche y_p sous la forme $y_p(t) = kte^{mt}$ avec $k \in \mathbb{K}$ à déterminer

si m est racine double de l'équation $(*)$, on recherche y_p sous la forme $y_p(t) = kt^2e^{mt}$ avec $k \in \mathbb{K}$ à déterminer

– $\boxed{\text{si } d(t) = C\cos(\omega t) = \Re e\left(Ce^{i\omega t}\right) \text{ ou } d(t) = C\sin(\omega t) = \Im m\left(Ce^{i\omega t}\right)}$ alors

si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation $(*)$, on recherche y_p sous la forme $y_p(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer (i.e $\Re e\left(ke^{i\omega t}\right)$ où $k \in \mathbb{C}$)

si $i\omega$ est racine simple de l'équation $(*)$, on recherche y_p sous la forme $y_p(t) = \alpha t\cos(\omega t) + \beta t\sin(\omega t)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer (i.e $\Re e\left(kte^{i\omega t}\right)$ où $k \in \mathbb{C}$)

si $i\omega$ est racine double de l'équation $(*)$, on recherche y_p sous la forme $y_p(t) = \alpha t^2\cos(\omega t) + \beta t^2\sin(\omega t)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ sont à déterminer (i.e $\Re e\left(kt^2e^{i\omega t}\right)$ où $k \in \mathbb{C}$)

I-2-c) Techniques usuelles de recherche de solution dans le cas général

Dans le cas général, il n'a pas de résultats permettant de trouver de façons certaines h_1, h_2 et y_p.

Comme les équations sont linéaires, le principe de superposition des solutions s'applique :

Proposition : Principe de superposition des solutions

Étant donnés $\alpha, \beta, \gamma, \delta_1, \delta_2$ des applications de $C^0(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalles de $\mathbb{R}$,
si y_1 est une solution de $\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta_1(t)$ et y_2 est une solution de $\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta_2(t)$
alors, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \lambda\delta_1(t) + \mu\delta_2(t)$

Si on connaît une solution homogène h_1 alors on dispose d'une technique permettant de trouver les autres solutions homogène par abaissement de l'ordre (on passe d'une EDL2 à une EDL1). C'est la méthode de Lagrange :

Méthode (de Lagrange) : résoudre (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ **si on connaît une solution homogène** h

Si h est une solution homogène qui ne s'annule pas sur I alors on cherche la solution générale sous la forme

$$y = h \times z \text{ avec } z \text{ supposée deux fois dérivables sur I}$$

On pourra déterminer (en théorie) z car z' est solution d'une équation différentielle scalaire du premier ordre.

On a $y = h \times z$, $y' = h'z + hz'$ et $y'' = h''z + 2h'z' + hz''$

$$\begin{aligned} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) &\Leftrightarrow h''z + 2h'z' + hz'' + a(t)(h'z + hz') + b(t)hz = c(t) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(h'' + a(t)h' + b(t)h)}_{=0} z + hz'' + (2h' + a(t)h)z' = c(t) \\ &\Leftrightarrow z' \text{ est solution de } \quad hY' + (2h' + a(t)h)Y = c(t) \end{aligned}$$

(qui est une EDL1 résolue en Y' car h ne s'annule pas)

Cette technique ressemble beaucoup à la méthode de variation de la constante!
Il faut savoir refaire le raisonnement au cas par cas pour passer de l'EDL2 de départ à l'EDL1 vérifiée par z'.
En pratique, on évite au maximum de calculer les dérivées de h : on raisonne en symbolique comme dans la démonstration ci-dessus et on substitue à la fin.

Enfin, on dispose de techniques usuelles (déjà rencontrées pour certaines d'entre elles) qu'il faut savoir conduire et qui seront généralement suggérées par l'énoncé. Ces techniques nous permettent souvent de trouver une solution homogène puis, en combinant avec la méthode de Lagrange, d'obtenir toutes les solutions homogènes. Elles peuvent aussi être utilisées pour trouver une solution particulière.

- Rechercher une solution sous une forme déterminée par le sujet

On peut, par exemple, rechercher une solution sous une forme exponentielle $[t \mapsto e^{\lambda t}]$ où λ est à déterminer, sous une forme polynomiale ou sous une autre forme proposée par le sujet.

EXEMPLE 4 On considère l'équation différentielle $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$

1. Identifier les solutions polynomiales

On commence par identifier le degré d'une solution polynômiale non nulle. Si P est un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ et de coefficient dominant $a \neq 0$, avec $[y : x \mapsto P(x)]$ solution, on a $(1 + X^2)P'' + XP' - P = 0$
En annulant le coefficient du terme de degré n du premier membre , on a :

$$\big(n(n-1) + n - 1\big)\underbrace{a}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow (n-1)\underbrace{(n+1)}_{\geqslant 1} = 0 \Leftrightarrow n = 1$$

Aussi : $P = aX + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(1 + X^2) \times 0 + X \times a - (aX + b) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ d'où $P = aX$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Les solutions polynomiales sont donc les fonctions linéaires $[x \mapsto ax]$ où $a \in \mathbb{R}$

2. Calculer, quand c'est possible, la dérivée de F où $\mathrm{F}(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

Puisque $1+x^2>0$, le numérateur de F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition.

Par quotient, F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec : $\mathrm{F}'(x)=-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}+\dfrac{1}{x}\times\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{-(1+x^2)+x^2}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

Cette question est clairement une question intermédiaire qui trouvera son utilité dans une recherche de primitive ensuite.

3. Résoudre alors l'équation $(1+x^2)y''+xy'-y=0$ sur $\mathbb{R}$

• La théorie générale s'applique puisque $1+x^2\neq 0$ sur $\mathbb{R}$ et l'équation étant homogène : on sait que l'ensemble des solutions est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de dimension 2 qu'on peut écrire $\mathscr{S}=\mathrm{Vect}(h_1,h_2)$ avec h_1 et h_2 deux solutions non colinéaires.

• On ne connaît, pour l'instant, qu'une solution $h_1=[x\mapsto x]$ sur $\mathbb{R}$ identifiée à la question 1.

• Appliquons la méthode de Lagrange pour trouver une autre solution h_2.

On cherche donc une solution sous la forme $y(x)=h(x)z(x)$ avec z deux fois dérivable sur I et $h=h_1$:

$$y=hz\quad(\times-1),\qquad y'=h'z+hz'\quad(\times x)\qquad\text{et}\qquad y''=h''z+2h'z'+hz''\quad(\times(1+x^2))$$

Pour être efficace dans le calcul, on fait apparaître à côté des dérivées les coefficients (Ici : $(\times-1)$, $(\times x)$, $(\times(1+x^2))$) et on réunit les termes suivant les dérivée de z : on regroupe tous les termes avec du z, tous les termes avec z', tous les termes avec z''. La partie devant z disparaît car h est solution homogène. Pour les parties devant z' et z'', on peut substituer $h(x)$ et $h'(x)$ par leurs véritables expressions.

$$(1+x^2)y''+xy'-y=0\Leftrightarrow\underbrace{\Big((1+x^2)h''+xh'-h\Big)}_{=0}\times z+\Big(2(1+x^2)\times 1+x\times x\Big)z'+(1+x^2)xz''=0$$

$$\Leftrightarrow x(1+x^2)z''+(2+3x^2)z'=0\Leftrightarrow z'\text{ solution }\quad x(1+x^2)\mathrm{Y}'+(2+3x^2)\mathrm{Y}=0$$

- Il s'agit donc, dans un premier temps, de résoudre l'EDL1 $(\mathrm{E}_1):\ x(1+x^2)\mathrm{Y}'+(2+3x^2)\mathrm{Y}=0$ sur $\mathbb{R}$

Elle n'est pas résolue. On commence donc par résoudre sur un intervalle $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}^*$ où $x(1+x^2)\neq 0$:

$$x(1+x^2)\mathrm{Y}'+(2+3x^2)\mathrm{Y}=0\Leftrightarrow \mathrm{Y}'+\frac{2(1+x^2)+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{Y}=0\Leftrightarrow\mathrm{Y}'+\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{Y}=0$$

Ici $a(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{1+x^2}=\mathrm{A}'(x)$ avec, par exemple : $\mathrm{A}(x)=2\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln\left(x^2\sqrt{1+x^2}\right)$

L'expression des solutions de (E_1) sur I est donc $\mathrm{Y}(x)=\mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)}=\dfrac{\mathrm{C}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ avec $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$

- On cherche ensuite les solutions de $z'(x)=\mathrm{Y}(x)=\dfrac{\mathrm{C}}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\Big(-\mathrm{C}\mathrm{F}(x)\Big)'$ en utilisant la question 2

Or les primitives diffèrent entre-elles d'une constante donc : $z(x)=-\mathrm{C}\mathrm{F}(x)+\mathrm{K}$ où $(\mathrm{C},\mathrm{K})\in\mathbb{R}^2$

- Sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^*$

y est solution de (E) $\Leftrightarrow\exists(\mathrm{C},\mathrm{K})\in\mathbb{R}^2,\forall x\in\mathrm{I},\ y(x)=h(x)z(x)=-\mathrm{C}x\mathrm{F}(x)+\mathrm{K}x$

$\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in\mathrm{I},\ y(x)=\lambda\sqrt{1+x^2}+\mu x$ *(quitte à prendre $\lambda=-\mathrm{C}$...)*

On voit ici apparaître la structure de l'ensemble solution $\mathrm{Vect}(h_1,h_2)$ avec $h_1(x)=x$ et $h_2(x)=\sqrt{1+x^2}$

Les solutions obtenues le sont sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^*$ mais on remarque que ces solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ ce qui permet de conclure directement sans avoir à faire un recollement

• On sait que $h_1=[x\mapsto x]$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La fonction $h_2=[x\mapsto x\mathrm{F}(x)]=[x\mapsto\sqrt{1+x^2}]$ est bien de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, elle est solution de (E) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ d'après ce qui précède et en 0 (avec un DL) :

$h_2(x)=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$ aussi $h_2(0)=1;h_2'(0)=0$ et $h_2''(0)=1$ (par identification avec la formule de Taylor-Young puisque f est C^2) donc : $(1+0^2)h_2''(0)+0\times h_2'(0)-h_2(0)=1-1=0$

Finalement, h_1 et h_2 sont deux solutions homogènes de (E) et elles sont clairement non colinéaires d'où :

$$\mathscr{S}=\mathrm{Vect}(h_1,h_2)=\left\{[x\mapsto \mathrm{A}x+\mathrm{B}\sqrt{1+x^2}]\mid(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2\right\}$$

• Utiliser un changement de variables Celui-ci sera toujours indiqué par le sujet.

Le changement de variables est une autre technique usuelle où on ramène, en général, l'EDL2 à coefficients non constants à une résolution d'EDL2 à coefficients constants.

EXEMPLE 5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E) : $(1+t^2)^2y''+2t(1+t^2)y'+y=\dfrac{1}{1+t^2}$ en posant $t=\tan x$

• On pose $z(x)=y(t)$ où $t=\tan x \Leftrightarrow x=\text{Arctan}\, t$

C'est possible car les fonctions tangente et Arc-tangente réalisent des bijections réciproques entre l'intervalle $\mathrm{I}=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\mathbb{R}$. On a : $z(x)=y(\tan x)$ et $y(t)=z(\text{Arctan}\, t)$

Puisque tan est deux fois dérivables sur I et Arctan est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$,
- si y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, z sera deux fois dérivable sur I par composition
- si z est deux fois dérivable sur I, y sera deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition

Ainsi : y deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow z$ est deux fois dérivable sur I

De plus : $y'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}z'(\text{Arctan}\, t)$ et $y''(t)=\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}z'(\text{Arctan}\, t)+\dfrac{1}{(1+t^2)^2}z''(\text{Arctan}\, t)$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ (1+t^2)^2y''(t)+2t(1+t^2)y'(t)+y(t)=\frac{1}{1+t^2}$$
$$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ -2tz'(\text{Arctan}\, t)+z''(\text{Arctan}\, t)+2tz'(\text{Arctan}\, t)+z(\text{Arctan}\, t)=\frac{1}{1+t^2}$$
$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathrm{I},\ z''(x)+z(x)=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x$$

• On résout (E') : $z''+z=\cos^2 x$ sur I C'est une EDL2 à coefficients constants.

Solutions homogènes : L'équation caractéristique est $r^2+1=0$ donc il y a deux racines conjuguées $0\pm i\times 1$

Les solutions homogènes ont pour expression
$$z_h(x)=e^{0\times x}\big(\mathrm{A}\cos(1\times x)+\mathrm{B}\sin(1\times x)\big)=\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x \text{ avec } (\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$$

Solution particulière : On remarque que $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\Re e(e^{2ix})$

On cherche une solution particulière par superposition sous la forme $z_p(x)=z_1(x)+z_2(x)$ avec

z_1 solution de $z''+z=\dfrac{1}{2}$ et on remarque que $z_1(x)=\dfrac{1}{2}$ convient.

$z_2=\Re e(\tilde{z})$ où $\tilde{z}$ solution de $z''+z=\dfrac{e^{2ix}}{2}$. Puisque $2i$ n'est pas racine de $r^2+1=0$, on cherche $\tilde{z}(x)=\alpha e^{2ix}$ avec $\alpha\in\mathbb{C}$: $\tilde{z}''+\tilde{z}=\dfrac{e^{2ix}}{2}\Leftrightarrow\big(-4\alpha+\alpha\big)e^{2ix}=\dfrac{e^{2ix}}{2}\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{1}{6}$ d'où $z_2(x)=\Re e\left(-\dfrac{1}{6}e^{2ix}\right)=-\dfrac{1}{6}\cos(2x)$

Finalement, une solution particulière a pour expression $z_p(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\cos(2x)$

Solutions globales : Les solutions z de (E') sont telles que : $\exists(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2, \forall x\in\mathrm{I},\ z(x)=\mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\cos(2x)$

• Revenons à l'équation (E) à l'aide du changement de variables :

y solution de (E) $\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=z(\text{Arctan}\, t)=\mathrm{A}\cos(\text{Arctan}\, t)+\mathrm{B}\sin(\text{Arctan}\, t)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\cos(2\,\text{Arctan}\, t)$

Remarque : On peut simplifier ces expression sachant

$$\text{Arctan}\, t\in\mathrm{I} \text{ (d'où } \cos(\text{Arctan}\, t)>0 \text{ et } \sin(\text{Arctan}\, t)\geqslant 0) \text{ et } \cos^2(\text{Arctan}\, t)=\frac{1}{1+\tan^2\text{Arctan}\, t}=\frac{1}{1+t^2}$$

$\cos(\text{Arctan}\, t)=|\cos(\text{Arctan}\, t)|=\sqrt{\cos^2\text{Arctan}\, t}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $\quad\cos(2\,\text{Arctan}\, t)=1-2\cos^2(\text{Arctan}\, t)=1-\dfrac{2}{1+t^2}=\dfrac{t^2-1}{1+t^2}$

$\sin(\text{Arctan}\, t)=|\sin(\text{Arctan}\, t)|=\sqrt{\sin^2(\text{Arctan}\, t)}=\sqrt{1-\cos^2(\text{Arctan}\, t)}=\sqrt{1-\dfrac{1}{1+t^2}}=\dfrac{|t|}{\sqrt{1+t^2}}$

de sorte que : $y(t)=\dfrac{\mathrm{A}}{\sqrt{1+t^2}}+\dfrac{\mathrm{B}|t|}{\sqrt{1+t^2}}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{t^2-1}{6(1+t^2)}$ avec $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$