CHAPITRE IV: COMPLÉMENTS SUR LES COURBES PLANES

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

I) Représentation des courbes planes usuelles

I-1) Représentation paramétrique et représentation cartésienne

On a rencontré des courbes planes donnée par

- une représentation paramétrique

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I \quad \text{associée à une fonction vectorielle} \left[\begin{array}{rcl} f : I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & f(t) = \left(x(t), y(t)\right) \end{array} \right]$$

- une représentation cartésienne

$$\Gamma : F(x,y) = 0 \quad \text{où } \left[F : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right] \text{ est une application de classe } C^1 \text{ sur un ouvert } \mathscr{U} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

On a alors $\Gamma = \left\{M(x,y) \,\middle|\, F(x,y) = 0\right\}$ et l'équation $F(x,y) = 0$ est une équation cartésienne de Γ.

On donnera plus tard (cf chapitre « Fonctions de plusieurs variables ») une définition rigoureuse de la classe C^1 sur $\mathscr{U}$
Pour le moment, on admet que cela signifie qu'on peut calculer sans problème les dérivées partielles pour $(x,y) \in \mathscr{U}$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ *s'obtient en dérivant* $F(x,y)$ *selon la variable x en considérant y constant*
- $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ *s'obtient en dérivant* $F(x,y)$ *selon la variable y en considérant x constant*

Selon l'étude à mener, il pourra être plus judicieux de choisir une représentation plutôt qu'une autre.
Il s'agit donc de connaître et (reconnaître rapidement) les courbes usuelles quelque soit la représentation choisie et de pouvoir passer de l'une à l'autre.

I-2) Equations des courbes planes usuelles de PTSI : droites et cercles

On a appris dans le cours de géométrie plane de PTSI à repérer les droites et les cercles dans le plan.
Dans la suite, x_0, y_0, a, b, c sont des nombres réels et $R \geqslant 0$

- $\boxed{\mathscr{D} : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$ représente

  En modifiant le domaine décrit par le paramètre (par exemple : $t > 0$, $t \in [0,1]$,etc), on décrit également des demi-droites ou des segments.

- $\boxed{\mathscr{D} : ax + by + c = 0 \text{ où } (a,b) \neq (0,0)}$ représente

  Si on remplace le = par des inégalités, l'inéquation obtenue décrit des demi-plans de frontières la droite $\mathscr{D}$

- $\boxed{\mathscr{C} : \begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}, t \in [a, a+2\pi[}$ représente

  En modifiant le domaine décrit par le paramètre (par exemple : $t \in [0,\pi]$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,etc), on décrit également des demi-cercle ou des quarts de cercle. Si on prend un domaine large (par exemple $t \in \mathbb{R}$), le cercle support est décrit plusieurs fois.

- $\boxed{\mathscr{C}:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\mathrm{R}^2}$ représente

  Plus généralement, une équation $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ représente

EXEMPLE N° 1 a et b sont des paramètre réels avec $ab \neq 0$

1. Donner un point et un vecteur directeur de la droite $\Delta:\ bx+ay-2ab=0$

2. Donner le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}:\ x^2+y^2-2(a+b)(x+y)+8ab=0$

3. Donner une équation cartésienne de la parallèle Δ' à Δ issue de $\mathrm{P}(b,a)$ en utilisant:

a) un déterminant b) un produit scalaire

4. On suppose $a \neq b$ et on pose $c=(1+\delta)a+(1-\delta)b$. Déterminer δ pour que le point $\mathrm{Q}(c,c)$ soit sur le cercle $\mathscr{C}$. Donner une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en Q sans utiliser ni produit scalaire, ni déterminant.

II) Les coniques

Nous allons maintenant rencontrer une nouvelle famille de courbes planes qu'il va falloir apprendre à reconnaître et représenter à partir d'une représentation donnée.

II-1) Définition par foyer, directrice et excentricité

Définition géométrique des coniques (par foyer,directrice, excentricité) :

Soit F un point de $\mathbb{R}^2$, Δ une droite ne contenant pas F et $e > 0$ un réel,
on appelle **conique de foyer** F**, de directrice** Δ**, d'excentricité** e, l'ensemble des points M vérifiant

$$d(\mathrm{M},\mathrm{F}) = e \times d(\mathrm{M},\Delta)$$

Lorsque $0 < e < 1$, la conique est une **ellipse**.
Lorsque $e = 1$, la conique est une **parabole**.
Lorsque $e > 1$, la conique est une **hyperbole**.

De part la définition géométrique, l'axe issu de F perpendiculaire à Δ est nécessairement un axe de symétrie.

Obtention d'une équation cartésienne à partir de la définition géométrique

On notera $\mathscr{C}$ la conique et on choisit un repère orthonormée du plan $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:
- il est naturel, dans un premier temps, de placer l'origine O au foyer soit O = F
- il est aussi naturel de placer l'axe des abscisses sur l'axe de symétrie repéré.
- l'axe des ordonnées est alors parallèle à la directrice Δ et on oriente les axes pour que $\Delta : \ x = -d$ où $d(\mathrm{F},\Delta)$.

Dans ce contexte, pour tout point $\mathrm{M}(x, y)$, on a :
- $d(\mathrm{M},\mathrm{F}) = \mathrm{OM} =$
- $d(\mathrm{M},\Delta) = \mathrm{MH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur Δ

  Par le choix du repère, H a pour coordonnées et donc : $d(\mathrm{M},\Delta) =$

Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ s'écrit donc :

Cas d'une parabole $(e = 1)$ Une équation de $\mathscr{C}$ s'écrit alors : $\mathrm{M}(x, y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow$

Dans ce cas, on obtient facilement un point S de cette parabole situé sur l'axe de symétrie à mi-distance entre le foyer et la directrice de coordonnée . Ce point S est le sommet de la parabole.
On effectue alors un changement d'origine en S où on note (X, Y) les coordonnées de M dans $(\mathrm{S}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$\overrightarrow{\mathrm{SM}} = \overrightarrow{\mathrm{SO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} \Leftrightarrow$

Dans le repère $(\mathrm{S}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une équation de $\mathscr{C}$ devient $\mathrm{M}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow$

L'équation est ***une équation cartésienne réduite d'une parabole*** dans un repère orthonormé où l'origine est au sommet et l'axe des abscisses est porté par l'axe de symétrie de la parabole.

Cas d'une ellipse ($0 < e < 1$) Une équation de $\mathscr{C}$ s'écrit alors :

$M(x, y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow$

Quitte à changer l'origine du repère en Ω , l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

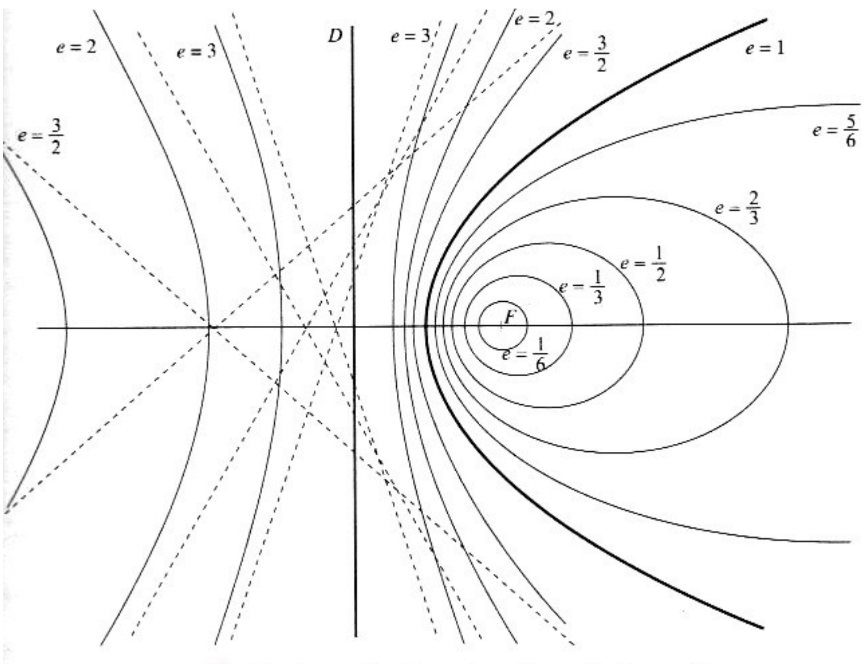
L'équation est ***une équation cartésienne réduite d'une ellipse*** dans un repère orthonormé où l'origine est au centre de l'ellipse et les axes sont portés par les axes de symétrie de l'ellipse.

Cas d'une hyperbole ($e > 1$) Une équation de $\mathscr{C}$ s'écrit alors :

$M(x, y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow$

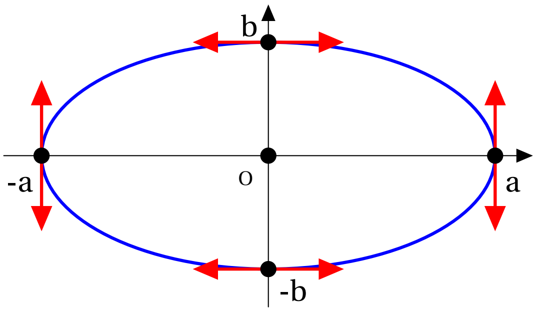
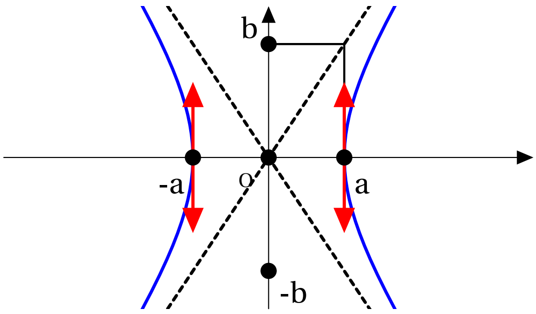
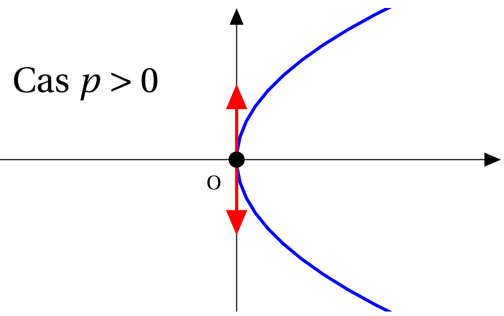
Quitte à changer l'origine du repère en Ω , on obtient l'équation dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

L'équation est ***une équation cartésienne réduite d'une hyperbole*** dans un repère orthonormé où l'origine est au centre de l'hyperbole et les axes sont portés par les axes de symétrie de l'hyperbole.



Coniques de directrices D et de foyer F.

II-2) Equations réduites des coniques propres

Nature	Équation réduite	Représentation paramétrique	Allure	Caractéristiques géométrique
ELLIPSE $0 < e < 1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \end{cases}$		Centre : O demi-grand axe : a demi-petit axe : b Axes de symétrie : $O+\text{Vect}(\vec{\imath})$ et $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$ Sommets : $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ et $B(0,b)$, $B'(0,-b)$
HYPERBOLE $e > 1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t)=\pm a\,\text{ch}\, t \\ y(t)=b\,\text{sh}\, t \end{cases}$		Centre : O Axes de symétrie : $O+\text{Vect}(\vec{\imath})$ et $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$ Sommets : $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ Asymptotes : $O+\text{Vect}\left(\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ \pm b\end{pmatrix}\right)$ soit $y=\pm\frac{b}{a}x$
PARABOLE $e = 1$	$y^2=2px$	$\begin{cases} x(t)=\frac{t^2}{2p} \\ y(t)=t \end{cases}$		Sommet : O Axe : $O+\text{Vect}(\vec{\imath})$

On peut bien sûr décaler le centre par une translation : $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ a pour centre $\Omega(x_0,y_0)$

ou intervertir le rôle de x et y ce qui échange le rôle des axes : $x^2=2py$ représente une parabole d'axe $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$

Remarque 1 : Les cercles sont des ellipses propres où $a=b=R$ est le rayon du cercle.

Remarque 2 : Les courbes représentatives de la fonction carrée et de la fonction inverse sont bien des coniques

- $y=x^2$ est une parabole de centre O d'axe $O+\text{Vect}(\vec{\jmath})$ (inversion des axes)
- $y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow xy=1 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4}-\frac{(x-y)^2}{4}=1$ d'où une équation $\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=1$ dans le repère $\left(O,\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}),\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})\right)$
  donc c'est bien une hyperbole (équilatère $a=b$) de centre O

EXEMPLE N° 2 Reconnaître et esquisser les courbes données par la représentation:

1) $4x^2+y^2+16x-2y+8=0$ 2) $-x+2+4y^2=0$ 3) $x^2-3y^2+6x-12y-12=0$ 4) $y^2-2y-4x^2=0$

5) $\begin{cases} x(t)=t^2 \\ y(t)=t \end{cases}, t\geqslant 0$ 6) $\begin{cases} x(t)=3\operatorname{ch} t \\ y(t)=1-\operatorname{sh} t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ 7) $\begin{cases} x(t)=2+3\sin t \\ y(t)=1+\cos t \end{cases}, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Préciser le centre et les sommets éventuels. Donner une équation cartésienne des asymptotes si c'est une hyperbole.

III) Tangente à une courbe plane, enveloppe d'une famille de droites

III-1) Tangente à une courbe donnée par une représentation paramétrique (Rappels)

Si la courbe est donnée par une représentation paramétrique $\Gamma : \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, t\in \mathrm{I}$ associée à une fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & f(t)=\big(x(t),y(t)\big) \end{array}\right]$ suffisamment régulière et on a vu que :

- la tangente au point $\mathrm{M}(t_0)=f(t_0)$ est dirigée par

  La tangente est donc la droite $\mathcal{T}_0 =$
  On obtient une équation cartésienne via : $\mathrm{M}(x,y)\in\mathcal{T}_0 \Leftrightarrow$
- si $p=1$, le point est régulier sinon le point est stationnaire (ie $f'(t)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$)
- si le point est stationnaire, on précise l'allure

III-2) Tangente à une courbe donnée par une équation cartésienne

Définition : Gradient, Point régulier d'une courbe plane

Soit $\Gamma :\ f(x,y)=0$ une courbe plane associée à $\left[f : \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ de classe C^1 sur $\mathcal{U}$

- on appelle vecteur gradient de f au point $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ de Γ le vecteur $\overrightarrow{grad} f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$
- le point $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$ de Γ est un point régulier lorsque $\overrightarrow{grad} f(x_0,y_0)\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Proposition : Tangente en un point régulier d'une courbe plane donnée par une équation cartésienne

Soit $\Gamma :\ f(x,y)=0$ une courbe plane associé à $\left[f : \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ de classe C^1 sur $\mathcal{U}$
et $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$ un point régulier de Γ alors la tangente en M_0 à Γ a pour équation cartésienne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

autrement dit $\overrightarrow{grad} f(x_0,y_0)$ est un vecteur normal à la tangente à Γ en M_0

EXEMPLE N° 3 a et b sont des nombres réels avec $ab \neq 0$ et $a \neq b$ et on pose $c = (1+\delta)a + (1-\delta)b$ avec $\delta = \pm 1$

1. Retrouver avec ce résultat une équation cartésienne, vu dans l'exemple 1, de la tangente $\mathscr{T}$ en $Q(c, c)$ au cercle

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2(a+b)(x+y) + 8ab = 0$$

2. Déterminer la tangente au point $M_0(\frac{5}{2}, 4)$ de l'hyperbole $\mathscr{H}$ de sommet $A(-2, 1)$ et $A'(2, 1)$ qui admet pour asymptote la droite $\Delta : y = 2x + 1$

- **a.** en utilisant une équation cartésienne de $\mathscr{H}$
- **b.** en utilisant une représentation paramétrique de $\mathscr{H}$

Définition et proposition : Lignes de niveaux

Si $[f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}]$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$,
on appelle ligne de niveaux de f les courbes Γ_λ d'équations cartésiennes $\Gamma_\lambda : f(x, y) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

En un point où il est non nul, le vecteur $\overrightarrow{grad} f$ est orthogonal aux lignes de niveaux Γ_λ et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f (càd des λ croissant)

Remarques : Les lignes de niveaux correspondent aux lignes équipotentielles en physique.
Les lignes de champs sont, quand à elles, les courbes qui sont tangentes à $\overrightarrow{grad} f$ en un point où ce vecteur n'est pas nul. On dit que les deux courbes sont orthogonales.

III-3) Enveloppe d'une famille de droites

Définition : enveloppe d'une famille de droites

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un singleton) et une famille de droite $\left(\mathscr{D}_t\right)_{t\in \mathrm{I}}$.

On appelle enveloppe de la famille $\left(\mathscr{D}_t\right)_{t\in \mathrm{I}}$ une courbe Γ telle que les droites $\left(\mathscr{D}_t\right)_{t\in \mathrm{I}}$ soient les tangentes à Γ autrement dit

- $\forall t \in \mathrm{I}$, $\mathscr{D}_t$ est une tangente à Γ
- en chaque point de Γ, la courbe admet une tangente qui est l'une des droites $\left(\mathscr{D}_t\right)_{t\in \mathrm{I}}$

Méthode pratique de détermination d'une enveloppe

Les droites sont données par une représentation paramétrique

$$\mathscr{D}_t = \mathrm{A}(t) + \mathrm{Vect}\left(\vec{u}(t)\right) \quad \text{avec A}(t) \text{ un point du plan et } \vec{u}(t) \text{ un vecteur directeur de } \mathscr{D}_t$$

On suppose également que $\left[t \mapsto \mathrm{A}(t)\right]$ et $\left[t \mapsto \vec{u}(t)\right]$ sont de classe C^1 sur I.

On cherche un paramétrage régulier $[t \mapsto \mathrm{M}(t)]$ de l'enveloppe Γ (càd que tous les points $\mathrm{M}(t)$ sont réguliers : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} \neq \vec{0}$) tel que :

$$\mathscr{D}_t \text{ est la tangente en M}(t) \text{ à l'enveloppe } \Gamma$$

et donc :

- $\exists t \in \mathrm{I}$, $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_t \Leftrightarrow \underline{\exists \lambda(t) \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}$ et $\vec{u}(t)$ dirigent tous les deux la tangente $\mathscr{D}_t$ aussi $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}$ et $\vec{u}(t)$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \boxed{\det\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}(t)\right) = 0}$

EXEMPLE N° 4

Étant donnée une droite Δ du plan et F un point qui n'est pas sur Δ, on veut déterminer l'enveloppe $\mathscr{E}$ des médiatrices de [HF] lorsque H parcourt la droite Δ.
On considère, pour cela, un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ où O est le projeté orthogonal de F sur Δ et $\vec{\imath} = \overrightarrow{\mathrm{OF}}$.

1. Donner les coordonnées de F et celles de H qui dépendront d'un paramètre t
2. Donner un point $\mathrm{A}(t)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ de la médiatrice Δ_t de [HF], exprimé à l'aide de c et t.
3. Déterminer un paramétrage de l'enveloppe $\mathscr{E}$ recherchée
4. Donner une équation cartésienne de l'enveloppe $\mathscr{E}$ cherchée et en déduire la nature de cette enveloppe.

IV) *Propriétés métriques d'une courbe plane*

On considère une courbe plane Γ donnée par une représentation paramétrique $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in \mathrm{I}$

On note $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array} \right]$ la fonction vectorielle associée et $\mathrm{M}(t) = f(t)$ le point de paramètre t.

Enfin, on suppose la courbe régulière c'est à dire que f est de classe C^1 sur I et que tous les points de Γ sont réguliers (ie $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$)

IV-1) Longueur d'une courbe paramétrée régulière

Raisonnons comme "le physicien" : la distance entre deux points $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)$ (avec $\mathrm{d}t$ infiniment petit) peut être considérée comme la longueur d'un segment $\|\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)}\| = \|f(t+\mathrm{d}t) - f(t)\| \simeq \|f'(t)\|\mathrm{d}t$. Pour obtenir la longueur totale de la courbe, on somme pour les valeurs de t dans $[a,b]$ d'où :

Définition : Longueur d'une courbe paramétrée régulière

Si $\mathrm{I} = [a,b]$ où $a < b$ alors la longueur de Γ est le réel $\mathrm{L}(\Gamma) = \displaystyle\int_a^b \|f'(t)\|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{d}t$

EXEMPLE N° 5

- Quelle est la longueur d'un cercle de rayon R ?

- Quelle est la longueur de la courbe représentative de la fonction ch pour $x \in [-1,1]$?

- Quelle est la longueur d'un arche de la cycloïde $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$?

Pour une définition satisfaisante, la longueur de la courbe ne doit bien sûr pas dépendre du paramétrage choisie. On peut le vérifier en réalisant un changement de paramètre $t = \varphi(u)$ où φ est de classe C^1 et strictement monotone (par exemple croissante). Aussi, φ est bijective et on note $a = \varphi(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \varphi^{-1}(a)$ et $b = \varphi(\beta) \Leftrightarrow \beta = \varphi^{-1}(b)$.
La fonction vectorielle $\left[g = f \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2\right]$ donne alors un autre paramétrage de Γ et :

$\displaystyle\int_\alpha^\beta \|g'(u)\|\mathrm{d}u =$

On souhaite maintenant repérer un point sur la courbe à l'aide d'une « abscisse sur la courbe »par rapport à une origine $M(t_0)$ fixé. En imaginant qu'on déplie la courbe le long de l'axe réel en positionnant $M(t_0)$ en 0, on cherche l'abscisse $s(t)$ du point $M(t)$.

Définition : Abscisse curviligne

On appelle abscisse curviligne sur Γ avec origine en $M(t_0)$ la fonction $s : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I, \quad s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} \mathrm{d}u$$

$s(t)$ correspond bien à la longueur « algébrique »de la portion de Γ entre $M(t_0)$ et $M(t)$:

$$s(t) = \begin{cases} L\big(M(t_0)M(t)\big) & \text{si } t \geqslant t_0 \\ -L\big(M(t_0)M(t)\big) & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

Remarque : Une abscisse curviligne sur Γ est donc une primitive de la fonction $\|f'\|$ aussi $s'(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \|f'(t)\|$

Proposition : Paramétrage par l'abscisse curviligne

Une abscisse curviligne s sur Γ est une application de classe C^1 sur I qui réalise une bijection de I dans $J = s(I)$ avec s^{-1} est aussi de classe C^1 sur J.

On peut donc paramétrer Γ par l'abscisse curviligne en utilisant la fonction vectorielle $\left[g = f \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^2\right]$.

Remarque : Cela revient à utiliser $s = s(t)$ pour paramètre.

Remarque : $g \circ s = f$ aussi $\|f'(t)\| = \left\|s'(t) \times g' \circ s(t)\right\| = s'(t) \times \left\|g' \circ s(t)\right\| = \|f'(t)\| \times \left\|g' \circ s(t)\right\| \Rightarrow \left\|g' \circ s(t)\right\| = 1$

Ainsi : $\forall s \in J, \ \left\|g'(s)\right\| = 1$ autrement dit, avec ce paramétrage, le vecteur tangent g' est toujours unitaire.

IV-2) Repère de Frenet et courbure d'une courbe

Définition : Repère de Frenet

Si Γ est une courbe plane régulière et M est un point de Γ

alors $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = f'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $\overrightarrow{OM} = f(t)$ alors on définit les vecteurs unitaires :

- $\vec{T} = \dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ qu'on appelle **le vecteur tangent**.

  Si s est une abscisse curviligne sur Γ avec $\overrightarrow{OM} = f(t) = g(s)$ alors $\vec{T} = g'(s)$
- $\vec{N}$ qui est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{T}$ (i.e. $(\vec{T}, \vec{N}) = +\dfrac{\pi}{2}$) qu'on appelle **le vecteur normal**

Le repère de Frenet au point M de Γ est le repère $\left(M, \vec{T}, \vec{N}\right)$

Remarque utile : Si $\vec{T} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors $\vec{N} =$

Proposition et définition : Courbure

Si on suppose que le paramétrage est au moins de classe C^2, les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$ et $\vec{N}$ sont colinéaires.

On appelle courbure de Γ le réel γ tel que : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \vec{N}$

Remarque : On a aussi $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma \vec{T}$

Théorème de relèvement (admis)

Si Γ est une courbe régulière paramétrée par $[f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2]$ de classe C^2 alors

il existe une fonction α de classe C^1 sur I telle que $\forall t \in \mathrm{I}, \quad \vec{\mathrm{T}}(t) = \cos(\alpha(t))\,\vec{i} + \sin(\alpha(t))\,\vec{j} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$

Interprétation géométrique : α est donc une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{\mathrm{T}})$

Proposition : Formule de Frenet

Si $\vec{\mathrm{T}}$ et $\vec{\mathrm{N}}$ sont les vecteurs du repère de Frenet, γ la courbure et α tel que $\vec{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \quad \text{de sorte que :} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\vec{\mathrm{N}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\vec{\mathrm{T}}$$

Interprétation géométrique :

- Si $\gamma > 0$ alors α est croissante donc la courbe "tourne vers la gauche" car l'angle α augmente (selon l'orientation classique du plan).
  Si $\gamma < 0$ alors α est décroissante donc la courbe "tourne vers la droite" car l'angle α diminue.
- Plus $|\gamma|$ est grande, plus la variation de α est rapide et donc plus la courbe se "courbe rapidement"

Méthode : calcul de la courbure

Pour calculer la courbure γ en un point régulier $\mathrm{M}(t)$ de l'arc Γ de représentation $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,

- on calcule le premier vecteur du repère de Frenet : $\vec{\mathrm{T}} = \dfrac{f'(t)}{s'(t)}$ où $s'(t) = \|f'(t)\| \neq 0$ puisque $\mathrm{M}(t)$ est régulier
- Il y a alors deux possibilités :
  - on trouve un relèvement càd une fonction α de classe C^1 avec : $\vec{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}$ et alors : $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)}$
  - on utilise la formule de Frenet : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{\mathrm{N}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t} = \gamma\vec{\mathrm{N}}$ et, en comparant les abscisses, on détermine γ

Remarque : On retient facilement $\quad \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)} \quad$ ou $\quad \dfrac{d\vec{\mathrm{T}}}{ds} = \dfrac{\frac{d\vec{\mathrm{T}}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{d\vec{\mathrm{T}}}{dt}$

Attention toutefois à ne pas y voir une simplification de fraction mais un résultat issue de la dérivée d'une composée

$$\alpha = \alpha(s) = \alpha \circ s(t) \quad \text{d'où} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt} \times \frac{d\alpha}{ds}(s(t)) \Rightarrow \frac{d\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad \text{et, de même : } \vec{\mathrm{T}}(s) = \vec{\mathrm{T}}(s(t))$$

EXEMPLE N° 6 On veut déterminer, de 2 façons, la courbure aux points réguliers de la cycloïde Γ donnée par

$$f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

1. Pourquoi peut-on concentrer l'étude de la cycloïde pour $t \in [0, \pi]$?

2. On note $\vec{\mathrm{T}}$ le premier vecteur de Frenet.

Montrer que $\vec{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$ aux points réguliers pour les paramètres $t \in [0, \pi]$.

3. Déterminer la courbure en utilisant les formules de Frenet.

4. Déterminer γ en utilisant un relèvement de $\vec{\mathrm{T}}$ sous la forme $\vec{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha(t) \\ \sin\alpha(t) \end{pmatrix}$

V) Développée d'une courbe régulière

V-1) Rayon, centre et cercle de courbure

Définition : rayon et centre de courbure en un point birégulier

Un point M d'une courbe régulière Γ est birégulier lorsque la courbure γ en M est non nulle. On définit alors :

- le rayon de courbure $R = \dfrac{1}{\gamma}$
- le centre de courbure comme le point C tel que : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N}$
- le cercle de courbure comme le cercle de centre C et de rayon $|R|$

V-2) Développée d'une courbe régulière

Définition : Développée

La développée Γ_D d'une courbe régulière Γ est la courbe formée par l'ensemble des centres de courbures en M lorsque M parcourt Γ : $\Gamma_D = \left\{C \,\middle|\, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} \text{ où } M \in \Gamma\right\}$

Théorème : Caractérisation de la développée

La développée Γ_D d'une courbe régulière Γ est l'enveloppe des normales à la courbe Γ

Méthode : détermination de la développée d'une courbe plane

Étant donnée une courbe Γ donnée par une représentation paramétrique $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

1. on calcule le vecteur tangentiel $f'(t)$ et la courbe est régulière si $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$
2. Méthode n° 1 : on détermine les vecteurs de Frenet $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ et la courbure γ
   Si $\gamma \neq 0$, la courbe est bi-régulière et le rayon de courbure est $R = \dfrac{1}{\gamma}$
   La développée est alors la courbe paramétrée par $g(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = f(t) + R\overrightarrow{N}$
3. Méthode n° 2 : on détermine la développée comme l'enveloppe des normales
   On choisit un vecteur "simple" $\overrightarrow{n}(t)$ dirigeant la normale à partir du vecteur tangentiel $f'(t)$
   On recherche une représentation paramétrique de la développée sous la forme : $g(t) = f(t) + \lambda(t)\overrightarrow{n}(t)$ avec $\det(g'(t), \overrightarrow{n}(t)) = 0$.

SUITE EXEMPLE N° 6

5) Déduire la développée Γ_D de la cycloïde à partir du calcul du rayon de courbure vu auparavant.
6) Retrouver cette développée par une autre méthode.

EXEMPLE N° 7 Déterminer, de deux façons, la développée de l'astroïde $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$