CHAPITRE III: COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

I) *L'essentiel de la PTSI sur les séries numériques*

I-1) Le vocabulaire

Étant donnée une suite de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé.

- la série associée est notée ....
- le terme général d'ordre n de la série est ....
- la somme partielle d'ordre n de la série est.................
- on dit que la série converge lorsque.............................
- on dit que la série diverge lorsque ....
- Étudier la nature de la série, c'est ....
- Deux séries sont de même nature lorsque ....
- Si la série converge, la somme de la série est ....
- Si la série converge, le reste d'ordre n de la série est.............................et on a :.................
- On fixe n_1 et n_2 des entiers naturels supérieurs à n_0.
  Les séries $\sum\limits_{n\geqslant n_1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_2} u_n$..

I-2) Les séries de références

1. SÉRIE TÉLESCOPIQUE

La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est télescopique associée à la suite numérique (a_n) lorsque ....

- La somme partielle d'ordre n est ....
- La série est alors convergente si et seulement si ....
- Si elle converge, la somme de la série est ....

  et le reste d'ordre n est ....

EXEMPLES a) $\sum (e-1)e^n$ b) $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ c) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

2. SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est géométrique de raison $q\in\mathbb{K}$ lorsque...........

- La somme partielle d'ordre n est ....
- La série géométrique est convergente si et seulement si ....
- Si elle converge, la somme de la série est ....

  et le reste d'ordre n est ....

3. SÉRIE DE RIEMANN

La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est une série de Riemann lorsque ....

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si ....

EXEMPLES 0.25 Identifier les séries de référence ci-dessous et préciser leur nature

a) $\sum \dfrac{1}{n^e}$ b) $\sum \dfrac{1}{e^n}$ c) $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ d) $\sum \dfrac{1}{2^{2n}}$ e) $\sum \dfrac{(-1)^n}{3^{2n+1}}$ f) $\sum \dfrac{n^e}{n^\pi}$

I-3) Les théorèmes

1. DIVERGENCE GROSSIÈRE Si la série $\sum u_n$ est convergente alors ....

Si cette condition nécessaire n'est pas réalisée, la série diverge et on dit que.............................

2. OPÉRATION SUR LES SÉRIES

- Si $\alpha\in\mathbb{K}^*$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum(\alpha u_n)$ ....

  Dans le cas où elles convergent, on a : $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \alpha u_n =$.................

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature alors $\sum(u_n+v_n)$ ....
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature convergente alors $\sum(u_n+v_n)$ ....

  et, dans ce cas, on a : $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (u_n+v_n) =$..

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature divergente alors.............................

  Attention! Pour écrire $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}u_n+\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}v_n$, il faut s'assurer ....

EXEMPLES a) $\sum\left((-1)^n+(-1)^{n+1}\right)$ b) $\sum\left(3^n-2^n\right)$

3. CNS DE CONVERGENCE POUR LES SÉRIES À TERMES POSITIFS

Si le terme général de la série $\sum u_n$ garde un signe constant à partir d'un certain rang n_0,

- la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ des sommes partielles est une suite ....
- une série à termes positifs est donc convergente

  si et seulement si ....

4. LIMITE ET SIGNE PAR UN ÉQUIVALENT Si $u_n \sim v_n$ alors $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

5. THÉORÈMES DE COMPARAISON PAR INÉGALITÉ POUR LES SÉRIES À TERMES POSITIFS

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles, alors :

- $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \text{ (au moins à partir d'un certain rang } n_0) \\ \sum u_n \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \text{ (au moins à partir d'un certain rang } n_0) \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et alors : ....

EXEMPLE 0.5 Préciser la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^2+\cos^2 n}$

6. CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE POUR LES SÉRIES À TERMES DE SIGNE CONSTANT

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles telles que :

$\begin{cases} u_n \text{ garde un signe constant à partir d'un certain rang} \\ u_n \sim_{+\infty} v_n \end{cases} \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

EXEMPLE 0.75 Préciser la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n+(-1)^n \operatorname{Arctan}(n^{42})}$

EXEMPLE N° 2 Déterminer la nature de la série de terme général

1) $u_n = \dfrac{1}{2^n+n}$ 2) $u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 3) $u_n = \dfrac{\left(\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)^2}{\ln(n+1)-\ln n}$ 4) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

EXEMPLE N° 3 Justifier l'existence et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} + \dfrac{2^{n-1}}{e^{n+1}}$

II) Résultats sur les séries absolument convergente

II-1) Convergence absolue

Définition : Convergence absolue

On dit qu'une série à termes réels ou complexes converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge

Théorème : CVA ⇒ CV

Une série absolument convergente est une série convergente

Proposition : Inégalité triangulaire

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Attention ! La réciproque du théorème CVA ⇒ CV **est FAUSSE**

Contre-exemple : Étude de la série harmonique alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$

- Il n'y a pas convergence absolue car $\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| =$
- La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est pourtant convergente (On parle de semi-convergence).

  En effet, on prouve que les sommes partielles (S_n) de cette série convergent. On a : $S_n =$

  On connaît la relation pour $x \neq$: $\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k =$ qu'on ré-écrit : $\frac{1}{1+x} =$

  Si on intègre cette relation sur $[0,1]$, on a, par linéarité de l'intégrale :

  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$

  On reconnaît (presque) S_n à l'aide d'un changement d'indice :

  On obtient ainsi une écriture sous forme intégrale de $I_n = S_n + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$

  A l'aide de l'inégalité triangulaire et de la croissance de l'intégrale, on prouve $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

  On a donc justifié : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$

  autrement dit $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} =}$

II-2) Les théorèmes de convergence absolue

Théorème s

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes complexes (éventuellement réels)

Majoration : Si $|u_n| \leqslant |v_n|$ à partir d'un certain rang, alors la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$

Equivalence : Si $u_n \sim v_n$, la convergence absolue de $\sum v_n$ équivaut à celle de $\sum u_n$

Règle du « petit o » : Si $|u_n| = o(|v_n|)$ alors la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$

Remarque : Le résultat est aussi valable avec un « grand O »

EXEMPLE N° 4 Préciser la nature des séries

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 2) $u_n = n e^{-\sqrt{n}}$ 3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{(-1)^n n^2 + f(n)}$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(\mathbb{R}) \subset [-2, 2]$

MÉTHODE : UTILISATION DES RÉSULTATS DE COMPARAISON AVEC DES SÉRIES DE RÉFÉRENCES

- avec une série de Riemann ? : on peut utiliser une domination entre u_n et $\dfrac{1}{n^\alpha}$

 • on cherche............................. si on pense que la série converge car alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$

 et la convergence absolue de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$

 • on cherche ....si on pense que la série diverge car alors $\dfrac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$

 et donc, pour n assez grand : $0 < \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$ de sorte que la divergence de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ entraîne la divergence de $\sum u_n$

- avec une série géométrique ? : on peut utiliser une domination entre u_n et q^n où

 • on cherche ....si on pense que la série converge car alors $u_n = o(q^n)$

 et la convergence absolue de $\sum q^n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$

 • on cherche ....si on pense que la série diverge car alors $q^n = o(u_n)$

 et donc, pour n assez grand : $0 < q^n \leqslant u_n$ de sorte que la divergence de $\sum q^n$ entraîne la divergence de $\sum u_n$

EXEMPLE N° 5 Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement positif distinct de 1 fixé.

Théorème : Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ est une série de nombres réels ou complexes avec $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang

telle que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admet une limite $\ell \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ lorsque n tend vers $+\infty$

- Si $\ell < 1$ alors la série converge absolument.
- Si $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$) alors la série diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$ (cas douteux) alors on ne peut rien conclure.

  Exemples : $\sum \dfrac{1}{n}$ DV et $\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais $\sum \dfrac{1}{n^2}$ CV et $\dfrac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Définition : Exponentielle

Pour tout z complexe, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est convergente.

On justifie, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x}$

On admet que : $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = \exp(z) = e^{\Re e(z)} e^{i\Im m(z)}}$

Exemples : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = \ldots$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = \ldots$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!} = \ldots$

II-3) Produit de Cauchy de deux séries absolument convergente

L'objectif de cette partie est de pouvoir calculer le produit de la somme de deux séries : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

Que pourrait valoir, par exemple, $\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right)$ *pour* $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ *?*

Attention aux conclusions trop rapide : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$

Contre-exemple : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) =$ et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n} =$

Examinons le cas des sommes finies :

$$\left(\sum_{n=0}^{n} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{n} v_n\right) = (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = u_0(v_0 + \cdots + v_n) + u_1(v_0 + \cdots + v_n) + \cdots + u_n(v_0 + \cdots + v_n)$$

Aussi : $\left(\sum_{n=0}^{n} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{n} v_n\right) = \sum_{i=0}^{n} u_i \sum_{j=0}^{n} v_j = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} u_i v_j = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} u_i v_j$

On peut calculer cette somme double en sommant les termes sur le tableau des indices $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$ ligne par ligne, colonne par colonne mais aussi sur les diagonales :

$$\left(\sum_{n=0}^{n} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{n} v_n\right) =$$

Définition et théorème : Produit de Cauchy

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres réels ou complexes, on appelle produit de Cauchy de ces séries la série de terme général $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$

On admet alors le théorème suivant :

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors le produit de Cauchy converge aussi (absolument) et : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$

<u>Exemple</u> On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n-k} k!}$. Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

Appliquons le théorème à l'exponentielle : $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ et $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ sont absolument convergentes donc

Proposition : Exponentielle d'une somme

Pour $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2)$$

III) *Compléments sur les séries à termes réels*

III-1) *Technique de comparaison série-intégrale*

Il s'agit de comparer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ avec des intégrales $\int_{n_0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ lorsque

f est une fonction positive et monotone sur $[n_0, +\infty[$

Je vous conseille un raisonnement en 3 étapes :

1. on fait un dessin permettant de trouver les inégalités entre $f(k)$ et les intégrales $\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t$ en comparant les aires sous la courbe avec les aires de rectangle de hauteur $f(k)$ sur les segments $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$
2. On justifie rigoureusement les inégalités précédentes
3. On utilise les inégalités pour encadrer les sommes partielles de $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$

(Voir Fiche méthodologique)

Exemple classique Retrouver, à l'aide d'un raisonnement série/intégrale, que : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

EXEMPLE N° 6 Étudier la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ à l'aide d'une comparaison série/intégrale.
Proposer un équivalent de la somme partielle.

III-2) Le théorème des séries alternées

Théorème des séries alternées :

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0 alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Dans ce contexte, la somme de la série est toujours comprise entre 2 sommes partielles consécutives

et on possède une majoration du reste : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$

Démonstration

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0

i) $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est décroissante}}$ càd

ii) $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est à termes positifs}}$

On considère les sommes partielles $S_n =$

Limite de $(S_{2n+1}-S_{2n})$:

Monotonie de (S_{2n}) : la suite (S_{2n}) est car

Monotonie de (S_{2n+1}) : la suite (S_{2n+1}) est car

Ainsi, $\boxed{\text{les suites } (S_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (S_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$ de ce fait

et, par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ converge}}$ et on a l'encadrement :

$$\boxed{S_{2n} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k \qquad S_{2n+1}}$$

On obtient l'inégalité sur le reste à partir de cet encadrement :

Corollaire du théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0 à partir d'un certain rang alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Attention ! Les encadrements sur la somme et sur le reste ne sont plus valable dans ce cas.

EXEMPLE N° 7 Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\big(\ln(n+1)-\ln n\big)$ converge sans converger absolument

Attention ! Ne pas oublier l'hypothèse de décroissance...

Contre-exemple : La série $\sum \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ est alternée avec un terme général qui tend vers 0 mais ne converge pas.

Attention ! Expliquer l'erreur de l'élève bêta :

« $\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k} = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}+o(\sqrt{k})} \sim \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ or $\sum \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge par le théorème des séries alternée donc ~~ça converge~~ »